Método para linealizar la salida de un sensor

Rigoberto Quintero Camacho[1]

RESUMEN

En este artículo se presenta un método sencillo para linealizar un sensor. El método consiste en encontrar un valor fijo para una resistencia que se coloca en paralelo con la resistencia variable, además para probar el método se muestra un ejemplo en el que se linealiza un termistor (resistencia que varia con los cambios de temperatura), el cual es utilizado para el diseño de un circuito de medición de voltaje, en donde se requiere que la salida sea lineal.

Palabras clave: Linealizacion, Sensor, Resistencia de linealizacion, Regresión Lineal

Method for Linealizar the Exit of a Sensor

ABSTRACT

In this paper a simple method for lining a sensor is presented. The method consists in finding a fixed value for a resistance put parallel together with the variable resistance, an example, in which a termistor is lined, is shown as well, in order to test the method. This method is used for designing a voltage measuring circuit, where the output is required to be lineal.

INTRODUCCIÓN

Comprender el funcionamiento de los seres vivos no solamente desde el punto de vista de la fisiología si no también desde la ingeniería; este es uno de los principales objetivos de la bioingeniería, por cuanto de esta comprensión depende el éxito en la solución de problemas en el campo de la medicina como: El transplante de órganos, reconstrucción total o parcial de las extremidades, corrección de problemas de visión entre otros.

El diseño de aparatos de medición de alta precisión para sensar el comportamiento de los sistemas vivos, es de suma importancia para el logro de los objetivos anteriormente expuestos, uno de los requisitos cuando se diseñan estos aparatos de medición es la linealidad de su salida (por ejemplo en un medidor de voltaje que depende de la temperatura, la variación del voltaje por unidad de temperatura debe ser constante), es así como en este articulo se presenta un modelo muy sencillo para linealizar la salida de un sensor y este método se prueba linealizando un resistor.

Linealizar un sensor consiste en encontrar el valor de la resistencia que debe colocarse en paralelo con la resistencia variable

Este trabajo es un aporte en el diseño de sistemas de medición, por cuanto permite calcular el valor de la resistencia constante, que debe colocarse en paralelo con la resistencia variable, de tal manera que la salida de un censor resistivo resulte lineal; investigación que nació como un aporte propio en un trabajo como estudiante de la cátedra de Instrumentación, en la especialización en Bioingeniería.

LINEALIZACIÓN DE UN SENSOR

Supongamos que el sistema (sensor) que se esta diseñando tiene una resistencia variable R(x), la cual varia no linealmente de acuerdo con una variable independiente x (por ejemplo la temperatura) que pertenece al intervalo [a , b], esta situación la representamos mediante el circuito de la figura 1, linealizar el sistema consiste en establecer una metodología para diseñar el sistema de tal manera que la salida sea lineal

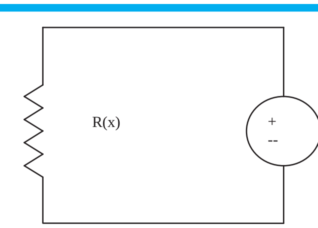

Figura 1. circuito con una resistencia variable

El método consiste en encontrar una resistencia fija en paralelo, la cual llamaremos resistencia de linealización R_L, esta situación la mostramos en la figura 2

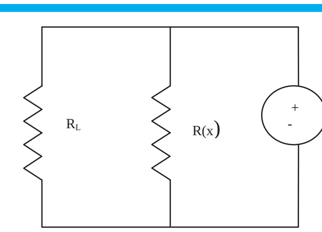

Figura 2. Circuito en paralelo con una resistencia fija de linelizacion Rl

CÁLCULO DE R_L

Supongamos que tomamos n valores de la variable x en el intervalo [a, b], y se toman n valores de la resistencia R(x) sean dichos valores; (x_0, R_0), (x_1,R_1) , (x_2,R_2), ..., (x_{n-1} ,R_{n-1}), además, podemos suponer que los x_k están ordenados de menor a mayor, esto es: $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\ldots\ldots x_{n-1}=b$, con lo cual $R_k = R(x_k)$,

[1] Miembro Grupo de Investigación Informática Educativa (GIIE) de la Universidad Distrial Francisco José de Caldas.

Artículo recibido en Abril de 2003
Aceptado en Junio 2003

La resitencia en un semiconductor decrece exponencialmente con la temperatura

para k= 0,1,2,3,,,,,,n-1, como las resistencias están en paralelo, entonces la resistencia equivalente [1]esta dada por:

$$r_k = r(x_k) = \frac{R_k R_L}{R_k + R_L} \quad (1)$$

como lo que se busca es que la respuesta r_k sea lineal, entonces tenemos que:

$$m = \frac{r_i - r_j}{x_i - x_j}, \text{ para todo (2) } i \neq j \qquad (2)$$
$$i = 0,1,2,\ldots\ldots, n-1 \quad j = 0,1,2,\ldots\ldots, n-1$$

donde *m* es una constante real (pendiente de la recta), en particular podemos encontrar m así: si definimos $r_{\max} = r(x_{\max})$ y $r_{\min} = r(x_{\min})$, entonces:

$$m = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (3)$$

de otra parte reemplazando a cada r_k definido en (1) en (2) tenemos:

$$m = \frac{\frac{R_i R_L}{R_i + R_L} - \frac{R_j R_L}{R_j + R_L}}{x_i - x_j} \text{ para todo } i, j \quad (4)$$

luego:

$$\frac{R_i R_L}{R_i + R_L} - \frac{R_j R_L}{R_j + R_L} = m(x_i - x_j) = \left(\frac{r_{\max} - r_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}\right)(x_i - x_j) \text{ para todo } i, j$$

remplazando tenemos:

$$\frac{R_i R_L}{R_i + R_L} - \frac{R_j R_L}{R_j + R_L} = \left[\frac{R_{\max} R_L}{R_{\max} + R_L} - \frac{R_{\min} R_L}{R_{\min} + R_L}\right]\left[\frac{x_i - x_j}{x_{\max} - x_{\min}}\right] \text{ para todo } i, j \quad (5)$$

factorizando R_L tenemos que:

$$R_L\left(\frac{R_i}{R_i + R_L} - \frac{R_j}{R_j + R_L}\right) = R_L\left[\frac{R_{\max}}{R_{\max} + R_L} - \frac{R_{\min}}{R_{\min} + R_L}\right]\left[\frac{x_i - x_j}{x_{\max} - x_{\min}}\right] \text{ para todo } i, j \quad (6)$$

como R_L es distinto de cero tenemos

$$\frac{R_i}{R_i + R_L} - \frac{R_j}{R_j + R_L} = \left[\frac{R_{\max}}{R_{\max} + R_L} - \frac{R_{\min}}{R_{\min} + R_L}\right]\left[\frac{x_i - x_j}{x_{\max} - x_{\min}}\right] \text{ para todo } i, j \quad (7)$$

como $R_{max} = R(x_{max}) = R(b) = R_b$ y $R_{min} = R(x_{min}) = R(a) = R_a$ remplazando en (7), y además como la igualdad es cierta para todo *i,j* entonces se puede tomar *i=n*:

$$\frac{R_b}{R_b + R_L} - \frac{R_j}{R_j + R_L} = \left[\frac{R_b}{R_b + R_L} - \frac{R_a}{R_a + R_L}\right]\left[\frac{b - x_j}{b - a}\right] \text{ para todo } j = 1,2,3\ldots\ldots, n-1 \quad (8)$$

si definimos: $p = \frac{b - x_j}{b - a}$,tenemos que:

$$\frac{R_b}{R_b + R_L} - \frac{R_j}{R_j + R_L} = \left[\frac{R_b}{R_b + R_L} - \frac{R_a}{R_a + R_L}\right]p \text{ para todo } j = 1,2,3\ldots\ldots, n-1 \quad (9)$$

despejando R_L en 9 se tiene:

$$R_L = \frac{R_a(R_b - R_j) - pR_j(R_b - R_a)}{p(R_b - R_a) - R_b + R_J} \text{ para todo j = 1,2,3\ldots\ldots,} n\text{-1} \quad (10)$$

Dado que la salida de los termistores es no lineal, a continuación se presenta un ejemplo en el se linealiza un termistor

LINEALIZACIÓN DE UN TERMISTOR

Los termistores son resistencias sensibles a la temperatura, estos se fabrican de materiales semiconductores tales como los óxidos de níquel, cobalto o manganeso y sulfuros de hierro, aluminio o cobre. Los óxidos semiconductores, al contrario de los metales, muestran un decremento en la resistencia con un incremento en la temperatura. La relación entre la resistencia R(x) como función de la temperatura x del termistor se muestra a continuación:

$$R(x) = R_0 e^{\beta\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)} \quad (11)$$

donde R_0 es la resistencia del termistor a la temperatura x_0 y β es una constante del material, llamada la temperatura característica del material, claramente la ecuación anterior nos indica que la salida de un termistor es no lineal, en la tabla1 y la Fig. 3 se muestra la salida de un termistor (con una constante de auto calentamiento de 2mV/oC) para diseñar un termómetro el cual se quiere que opere en un rango entre 20 y 42 grados centígrados

TABLA I. RESISTENCIA DEL TERMISTOR R_k EN OHMS A UNA TEMPERATURA X_k EN GRADOS CELSIUS

k	x_k	R_k
1	20	2492
2	22	2282
3	24	2090
4	26	1915
5	28	1757
6	30	1611
7	32	1481
8	34	1360
9	36	1251
10	38	1152
11	40	1060
12	42	982

Figura 3. Salida del termistor

como se observa la salida es no lineal, por lo tanto para linealizar la salida se debe calculara R_L en la ecuación (10), para lo cual se requiere el valor de *p*, el cual se calcula mediante la ecuación $p = \frac{b - x_j}{b - a}$ donde j es cualquier valor entre 1 y 12, en este caso elegimos j = 7 es decir el valor central de la temperatura x_j = 32, así que $p = \frac{42 - 32}{42 - 20} = 0.4545$, y para calcular R_L, utilizamos la formula 10, esto es:

$$R_L = \frac{2492(982 - 1481) - 0.4545(982 - 2492)}{0.4545(982 - 2492) - 982 + 1481} = 1212{,}55$$

, con este valor aplicamos la ecuación (1) a los valores de la tabla 1 y obtenemos la tabla 2 y la Fig 4,

TABLA II. RESISTENCIA R_K LINEALIZADA

k	x_k	R_k	r_k
1	20	2492	815,7
2	22	2282	791,8
3	24	2090	767,4
4	26	1915	742,4
5	28	1757	717,4
6	30	1611	691,8
7	32	1481	666,7
8	34	1360	641
9	36	1251	615,7
10	38	1152	590,7
11	40	1060	565,6
12	42	982	542,6

RESISTENCIA LINEALIZADA

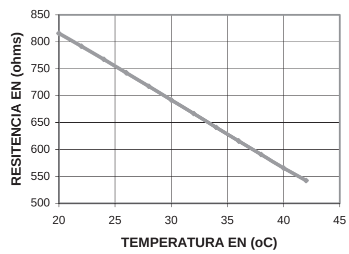

Figura 4. Salida de la resistencia linealizada

Una forma de probar que efectivamente la salida es lineal es utilizar del método de los mínimos cuadrados [2] para ajustar los datos (x_k , r_k) a una recta y verificar mediante el coeficiente de determinación del modelo, la tabla de análisis de varianza y las pruebas sobre los parámetros de modelo que los datos se ajustan a un modelo lineal [2], lo cual se puede realizar con cualquier paquete estadístico. Las tablas 3, 4, 5 de salida de computadora, sobre la idoneidad del modelo se muestran a continuación:

TABLA III. TABLA DE ANÁLISIS DE VARIANZA

	Gr.lib	S.deC	C:M	F	V.C deF
Regresión	1	89730	89730	140021	4,6E-22
Residuos	10	6,41	0,64		
Total	11	89737			

TABLA IV. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN Y COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN DEL MODELO

Coeficiente de correlación	1,000
Coeficiente de determinación R^2	1,000
R^2 ajustado	1,000
Error típico	0,801
Observaciones	12

TABLA V.PARÁMETROS DEL MODELO Y PRUEBA T PARA LOS MISMOS

	Coeficientes	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	1067,35	1004,05	0,00
Pendiente	-12,52	-374,19	0,00
Modelo	R(x)=-12,52x+1067,05		

Si la salida de un sistema de medición es lineal; un cambio de escala se reduce a un problema de regla de tres simple.

como se puede verificar en las tablas tanto el coeficiente de correlación como el de determinación son aproximadamente iguales 1 lo que indica que los datos se ajustan a un modelo lineal, además la prueba F del modelo, la que se muestra en la tabla de análisis de varianza, demuestra también que el modelo es lineal y este hecho se refuerza con la prueba t , para los parámetros del modelo que indica que la pendiente de la recta no es cero, así podemos afirmar que el modelo es : r (x)=-12,52x+1067,05. Que la salida de un sistema de medición sea lineal, es una característica importante del sistema por cuanto el cambio en la respuesta por unidad de la variable independiente es constante.

SENSIBILIDAD

La sensibilidad en un punto a de un sistema $f(x)$, se define como la derivada en ese punto, en el caso del termistor al sensibilidad mide la variación de la resistencia por unidad de temperatura, por lo tanto la sensibilidad de la resistencia linealizada es la pendiente de la recta (-12,52), o también se puede tomar la medida aproximada de la sensibilidad en cada punto mediante la aproximación:

$$S(x_k)=\frac{r(x_{k+1})-r(x_k)}{x_{k+1}-x_k} \tag{12}$$

ESTIMACIÓN DEL ERROR

Además del error de estimación del modelo de mínimos cuadrados, el cual se define como $e_k=r_k-r(x_k)$, se debe calcular el error que se comente en la medición y se define como la razón entre el error de estimación del modelo y la sensibilidad esto es: $E_k=\frac{e_k}{S(x_k)}$, aplicando la relación (12) y la formula del error en los datos de la tabla 2 se obtiene la tabla 6, notamos que el error de medición para el termistor da en unidades de temperatura

TABLA VI. SENSIBILIDAD EN (OHMS/OC) Y ERROR DE MEDICIÓN EN (OC)

x_k	R_k	r_k	$S(X_K)$	$r(X_K)$	e_K	E_K
20	2492	815,7	-11,93	816,85	-1,18	0,099
22	2282	791,8	-12,23	791,80	0,02	-0,001
24	2090	767,4	-12,46	766,75	0,61	-0,049
26	1915	742,4	-12,51	741,70	0,74	-0,060
28	1757	717,4	-12,80	716,65	0,78	-0,061
30	1611	691,8	-12,57	691,60	0,23	-0,018
32	1481	666,7	-12,84	666,55	0,15	-0,011
34	1360	641,0	-12,64	641,50	-0,48	0,038
36	1251	615,7	-12,49	616,45	-0,71	0,057
38	1152	590,7	-12,59	591,40	-0,65	0,052
40	1060	565,6	-11,50	566,35	-0,78	0,067
42	982	542,6		541,30	1,28	
SENSIBILIDAD PROMEDIO			-12,41			

Es de anotar que la sensibilidad promedio como es de esperarse es parecida a la pendiente de la recta estimada.

DISEÑO DEL CIRCUITO DE MEDICIÓN

Usando un montaje potenciometrico de pendiente negativa se diseña un circuito de medición, dicho circuito se presenta en el siguiente gráfico:

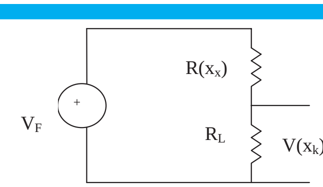

Figura 5. Circuito de medición

Para calcular el voltaje de alimentación V_F, es necesario tener en cuenta que para el termistor que se esta diseñando, la potencia que se disipa dentro de él, no calienta mas 0.05oC, con lo cual como el termistor tiene la característica de que el autocalentamiento es de 2mV/oC, luego La potencia de disipación es (0.05).2=0.1mV = 0.0001V , además utilizando un divisor de voltaje [1]se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{V(x_k)}{V_F}=\frac{R(x_k)}{R(x_k)+R_L} \qquad (13)$$

donde R_L es la resistencia de linealizacion calculada anteriormente, si tomamos $R(x_k)=|R_b-R_a|=R_c$ y para este valor de la resistencia encontramos un valor V_c, mediante la formula para el calculo de la potencia $P=\frac{V^2}{R}$, en particular $V_c=\sqrt{PR_c}$ y remplazando el la ecuación (13) tenemos: $\frac{V_c}{V_F}=\frac{R_c}{R_c+R_L}$ que despejando V_F tenemos:

$$V_F=\frac{(R_c+R_L)V_c}{R_c}=\frac{(R_c+R_L)\sqrt{PR_c}}{R_c} \qquad (14)$$

para el caso particular de este resistor $R_c=1510$, $R_L=1212{,}55$, $P=0.0001$,y remplazando estos valores en (14) tenemos:

$$V_F=\frac{(1510+1212.55)\sqrt{(0.0001).(1510)}}{1510}=0.707$$

este valor se remplaza en (13), para obtener la salida de voltaje la cual se muestra en la tabla 7 que contiene también los valores de la sensibilidad y el error de medición, la Fig 6 muestra la salida de voltaje en función de la temperatura, donde se observa que efectivamente es lineal, esto se corrobora ajustando los datos, de la temperatura contra voltaje, a un modelo lineal[2] como se puede verificar mediante las tablas 7, 8 y 9, por lo tanto el modelo V(x)=-0,007x+0,617 , ajusta perfectamente la salida de voltaje

TABLA VII. SALIDA DE VOLTAJE, SENSIBILIDAD Y ERROR DE MEDICIÓN

x_k	R_k	V_k	$S(X_K)$	$V(X_K)$	e_K	E_K
20	2492	0,4713	-0,0069	0,472	-0,0007	0,099
22	2282	0,4575	-0,0071	0,458	0,0000	-0,001
24	2090	0,4434	-0,0072	0,443	0,0003	-0,049
26	1915	0,429	-0,0072	0,429	0,0004	-0,06
28	1757	0,4145	-0,0074	0,414	0,0005	-0,061
30	1611	0,3997	-0,0073	0,400	0,0001	-0,018
32	1481	0,3852	-0,0074	0,385	0,0001	-0,011
34	1360	0,3704	-0,0073	0,371	-0,0003	0,038
36	1251	0,3558	-0,0072	0,356	-0,0004	0,057
38	1152	0,3413	-0,0073	0,342	-0,0004	0,052
40	1060	0,3268	-0,0066	0,327	-0,0004	0,067
42	982	0,3135		0,313	0,0007	
SENSIBILIDAD PROMEDIO			-0,007			

TABLA VIII. ANÁLISIS DE VARIANZA PARA EL VOLTAJE

	Gr.lib	S.deC	C:M	F	V.C deF
Regresión	1	0,029958	0,03	140021	4,57E-22
Residuos	10	2,00E-06	2,00E-07		
Total	11	0,02996			

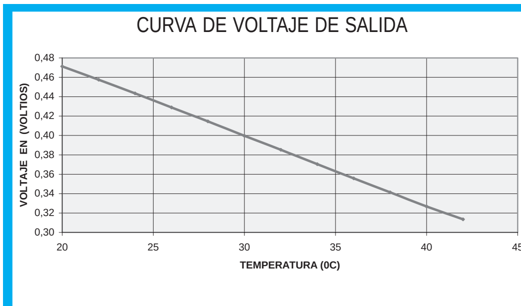

Figura 6. Salida de voltaje

TABLA XI. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN Y COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN DEL MODELO

Coeficiente de correlación	1,00
Coeficiente de determinación R^2	1,00
R^2 ajustado	1,00
Error típico	0,00
Observaciones	12

TABLA XI. PARÁMETROS DEL MODELO Y PRUEBA T PARA LOS MISMOS

	Coeficientes	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	0,617	1004,054	0,0000
Pendiente	-0,007	-374,194	0,000
Modelo	V(x)=-0,007x+0,617		

Se observa que los errores de medición de la temperatura en el caso del voltaje (que se calculan utilizando las formulas que se usaron para el calculo de los errores para la resistencia) son los mismos en el caso de resistencia, como era de esperarse.

CONCLUSIONES

1. El uso adecuado de los conceptos matemáticos como el de derivada, linealidad nos conducen a resultados de mucha utilidad en la ingeniería.

2. Es posible utilizar esta metodología en el caso de sensores capacitivos solamente que la capacitancia variable y la capacitancia fija van en serie.

3. La linealizacion de un sensor es importante por cuanto la sensibilidad del sistema de medición es constante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] DAVID E. JONSON , JOHNNY R JONSON Y METER D S<COTT, Análisis Básico de Circuitos Eléctricos Prentice may, Quinta Edición .

[2] SCHEAFFER MCCLAVE, Probabilidad y Estadística para Ingeniería, Grupo Editorial Iberoamérica Segunda Edición.

Rigoberto Quintero Camacho
Profesor de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería, Licenciado en Matemáticas Universidad Pedagógica Nacional, Especialista en Estadística Universidad Nacional, Especialista en Bioingeniería Universidad Distrital.