

# Reconstrucción no lineal de imágenes por resonancia magnética de datos no cartesianos en espacio K

Héctor Cristyan  
Manta Caro<sup>1</sup>

Héctor Fernando  
Cancino de Greiff<sup>2</sup>

## RESUMEN

En este artículo, se presentan dos métodos novedosos de reconstrucción no lineal de imágenes por resonancia magnética de datos no cartesianos en Espacio K, esto es, muestras no uniformes en el dominio espacio-frecuencia. En primera instancia, el método de reconstrucción por interpolación en el dominio de la frecuencia, *Gridding*, y en segundo lugar, el método de reconstrucción iterativa mediante la pseudo-inversión de la transformada rápida no uniforme de Fourier con la técnica no lineal del gradiente conjugado.

La investigación se enfoca en la elección de parámetros eficientes para la minimización de la función error cuadrático medio de reconstrucción y su posterior caracterización mediante técnicas de simulación de Montecarlo. Con el fin de simplificar y estandarizar el análisis y aplicación de los métodos dichas técnicas se realizan sobre una imagen antropogénica de tipo numérica, conocida como el *phantom* de Shepp y Logan.

**Palabras clave:** métodos de reconstrucción, imágenes por resonancia magnética, transformada rápida no uniforme de Fourier.

## NON-LINEAR RECONSTRUCTION OF MAGNETIC RESONANCE IMAGING OF NON-CARTESIAN K-SPACE DATA

### ABSTRACT

In this paper, two novel methods of non-linear reconstruction of magnetic resonance imaging of non-Cartesian K-Space data are presented. That is non-uniform samples at space-frequency domain. In the first place, the reconstruction method by interpolation at frequency domain, *Gridding*, and on the other hand, the iterative

reconstruction method by means of the pseudo-inversion of non-uniform fast Fourier transform with the non-linear technique of the conjugate gradient.

The investigation is focused in the election of efficient parameters to minimize the reconstruction mean squared error function and its subsequent characterization through Montecarlo simulation techniques. All of this, to simplify and standardize the analysis and application of these methods, which are applied over an anthropogenic image of numerical type, known as the phantom of Shepp and Logan.

**Key words:** reconstruction methods, magnetic resonance imaging, non-uniform fast Fourier transform.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad han surgido métodos de adquisición de imágenes por resonancia magnética más sofisticados que las convencionales adquisiciones cartesianas, en los cuales los datos colectados de la transformada continua de Fourier en el dominio espacio-frecuencia se encuentran muestreados de manera no uniforme [2].

Estas estrategias de muestreo están basadas en adquisiciones espirales y radiales del Espacio K y proporcionan ventajas y propiedades de movimiento comparadas con los métodos convencionales. Así, la imagen no puede ser reconstruida por simple aplicación de la transformada inversa rápida de Fourier y deben implementarse estrategias de reconstrucción más sofisticadas.

De esta forma, se han presentado algoritmos de reconstrucción con base en operadores de interpolación en el dominio de la frecuencia, y así emplear las ventajas computacionales de algoritmos como la FFT [8], con complicacio-

<sup>1</sup> Miembro Grupo de investigación Resonancia Magnética RM-UD  
<sup>2</sup> Director Grupo de investigación Resonancia Magnética RM-UD

nes en el manejo de la no uniformidad del muestreo, que conlleva la generación de zonas sobremuestreadas, y factores que reducen la calidad de la imagen reconstruida como el *aliasing*, y las réplicas.

Los intentos por solucionar estos problemas en la reconstrucción de imágenes médicas han llevado a la búsqueda de la llamada transformada rápida no uniforme de Fourier [1], [9], la cual podría tener la complejidad de los algoritmos de Cooley y Tukey [4] y ser exacta. Sin embargo, las soluciones actuales de transformada rápida no uniforme son soluciones aproximadas [5].

Así pues, se presenta una comparación entre métodos convencionales de reconstrucción basados en operadores de interpolación y el algoritmo de reconstrucción iterativa a fin de establecer parámetros eficientes para la minimización del error cuadrático medio de reconstrucción en ausencia de ruido, y en presencia de ruido blanco gaussiano de media cero.

## 2. ADQUISICIÓN DE IMÁGENES POR RESONANCIA MAGNÉTICA

La técnica de adquisición de Imágenes por Resonancia Magnética (IRM) [13] usada principalmente en los campos de la medicina comenzó con la tomografía, la cual consiste en producir imágenes en una delgada sección a lo largo del volumen del cuerpo humano. Durante la adquisición de imágenes IRM, el objeto se coloca en un campo magnético constante  $B_0$ , al irradiar el objeto con un pulso de radiofrecuencia con una banda de frecuencia angosta, sólo los espines en la frecuencia de resonancia serán excitados, los cuales se encuentran en una delgada sección perpendicular a la dirección del gradiente. Los gradientes de campo son controlables en tres ejes ortogonales entre sí  $G = (G_x, G_y, G_z)$ .

Debido a los gradientes de campo, la frecuencia de resonancia del espín depende de su posición, *frequency encoding*. Por desplazamiento del gradiente de sección  $G_z$  durante el tiempo de excitación, una angosta sección perpendicular al eje z se excita. La codificación espacial con el plano seleccionado se realiza mediante modificación de los gradientes en función del tiempo:  $G(t) = (G_x(t), G_y(t))$ . La señal recibida, *FID Free*

*Induction Decay*, resultante de modificar los gradientes controlables de campo magnético es igual a la transformada continua de Fourier de la imagen de la sección, a lo largo de la trayectoria  $K(t)$ .

### 2.1. Trayectorias del Espacio K

La secuencia de frecuencias espaciales muestreadas durante la adquisición de datos IRM se conoce por trayectorias del Espacio K, estas poseen un alto valor informativo, ya que muestran el momento en que se mide cada frecuencia espacial. En la Figura 1 se muestra una trayectoria tipo Lissajous, determinada en el espacio k por:

$$k_x(t) = k_{\max} \sin(2\pi\Omega_x t) \quad (1)$$

$$k_y(t) = k_{\max} \sin(2\pi\Omega_y t) \quad (2)$$

Donde  $k_{\max}$  es la máxima frecuencia espacial muestreada,  $\Omega$  la frecuencia de variación de campo magnético y en la Figura 2, se muestra un patrón de trayectoria espiral con desfase  $\beta$ , determinada por:

$$k_x(t) = k_{\max} t \cos(2\pi\Omega t + \beta) \quad (3)$$

$$k_y(t) = k_{\max} t \sin(2\pi\Omega t + \beta) \quad (4)$$

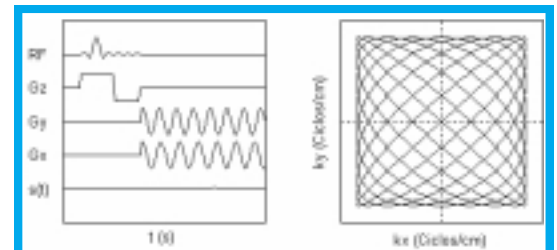


Figura 1. Secuencia de pulsos de la adquisición tipo Lissajous y cubrimiento en el Espacio K.

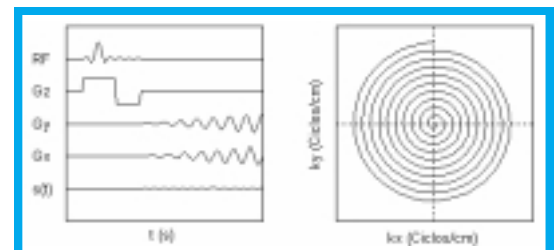


Figura 2. Secuencia de pulsos de la adquisición espiral y cubrimiento del Espacio K.

### 2.2. Phantom de Shepp – Logan

El *Phantom* de Shepp – Logan [11] es una superposición de 10 elipses, ver Figura 3, las cuales representan características del cerebro humano.



Figura 3. Phantom de Shepp - Logan.  
Amplitud de la señal FID.

Su principal ventaja es tener una expresión analítica simple para su transformada continua de Fourier. La transformada continua de Fourier 2D en este caso  $E$  de una elipse de intensidad  $\rho$ , semiejes de longitud  $A$  y  $B$ , ángulo de orientación  $\varphi$  y centrada en el punto  $x_0, y_0$  está dada por:

$$E = \rho \alpha e^{-i(k_x x_0 + k_y y_0)} \frac{J_1 \left( B \sqrt{(u' A B^{-1})^2 + v'^2} \right)}{\sqrt{(u' A B^{-1})^2 + v'^2}} \quad (5)$$

en donde  $u' = K_x \cos \varphi + K_y \sin \varphi$ ,  $v' = -K_x \sin \varphi + K_y \cos \varphi$  y  $J_1$  es la función de Bessel de primer orden y primer tipo. Así pues, la transformada continua de Fourier del *Phantom* completo se describe por:

$$E(k_x, k_y) = \sum_{i=1}^N E(k_x, k_y; \rho^i; x_0^i, y_0^i; A_i, B_i, \varphi_i) \quad (6)$$

### 3. MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN

Los algoritmos de reconstrucción se agrupan en tres grandes áreas:

- *Grid-Driven*: los valores de cada punto en la cuadrícula son interpolados de los datos vecinos en el Espacio K.
- *Data-Driven*: la contribución de cada dato es sumado al punto de la cuadrícula Cartesiana adyacente. Ejemplo: el algoritmo *Gridding*.
- Finalmente, existe un grupo de algoritmos que calculan aproximaciones locales a fin de minimizar el error de interpolación en localizaciones específicas de los datos muestreados y los puntos de la cuadrícula.

#### 3.1. Reconstrucción *Gridding*

La idea fundamental del método de reconstrucción *Gridding* [8] es como sigue: sea  $m(x, y)$  una función bidimensional con transformada de Fourier  $M(k_x, k_y)$  y  $S(k_x, k_y)$  una función de

muestreo no Cartesiano, los datos muestreados en el dominio de Fourier están dados por:

$$M_S(k_x, k_y) = M(k_x, k_y) \cdot S(k_x, k_y) \quad (7)$$

los cuales se convolucionan con una función  $C(k_x, k_y)$ , *Gridding Kernel*, posteriormente, se muestrean sobre una cuadrícula Cartesiana  $III(k_x, k_y)$  con separación entre puntos  $\Delta k$  de forma:

$$M_{SCS}(k_x, k_y) = \left[ \frac{M_S(k_x, k_y)}{*C(k_x, k_y)} \right] \cdot III \left( \frac{k_x}{\Delta k_x}, \frac{k_y}{\Delta k_y} \right) \quad (8)$$

en donde el símbolo  $*$  corresponde al operador convolución bidimensional. Después que todos los datos muestreados son procesados, se aplica la transformada inversa discreta de Fourier 2D, para producir la imagen.

#### 3.2. Compensación de la densidad no uniforme del muestreo

La transformada inversa de la función de muestreo no uniforme  $S(k_x, k_y)$ , es la respuesta al impulso del sistema  $s(x, y)$ , la cual afecta con *aliasing* por los lóbulos laterales a la imagen. La solución para corregir la densidad no uniforme de muestreo en la operación *Gridding* que tiene dos opciones:

Una es la precompensación:

$$\hat{M}(k_x, k_y) = \left[ \frac{M(k_x, k_y) \cdot S(k_x, k_y)}{*C(k_x, k_y)} \right] \cdot III \left( \frac{k_x}{\Delta k_x}, \frac{k_y}{\Delta k_y} \right) \quad (9)$$

La otra es la postcompensación:

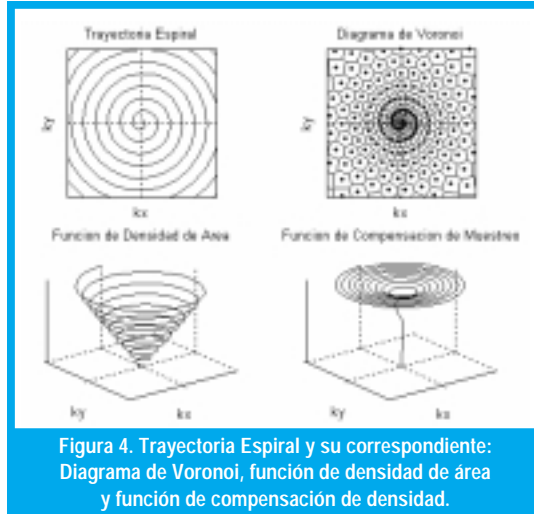
$$\hat{M}(k_x, k_y) = \left[ \frac{M(k_x, k_y) \cdot S(k_x, k_y)}{*C(k_x, k_y)} \right] \cdot III \left( \frac{k_x}{\Delta k_x}, \frac{k_y}{\Delta k_y} \right) \quad (10)$$

Así, existen muchas alternativas para estimar la función de compensación  $\rho(k_x, k_y)$ : una alternativa es calcular numéricamente las áreas asociadas con cada muestra. Para este fin, se describe un algoritmo llamado diagrama de Voronoi [10]. Así, la inversa de la función de densidad de área es equivalente a la función de compensación, ver Figura 4.

#### 3.3. Función de convolución *Gridding Kernel* y función de *apodization*

La función de convolución ideal es  $\text{sinc}(k_x / \Delta k_x) \text{sinc}(k_y / \Delta k_y)$ , la cual es una función de extensión infinita y debe truncarse en algún punto. Un primer procedimiento es realizar un

ventaneo de la función. Un segundo procedimiento es la reducción del ancho de la función de convolución. Esta convolución en el algoritmo *Gridding* tiene un doble efecto: un resultado indeseable al producir una atenuación no uniforme o *apodization*, y una supresión de los lóbulos laterales generados por la función de muestreo no Cartesiana.



La función de *apodization*  $c(x, y)$  es la transformada de Fourier de la función de convolución, *Gridding kernel*, la cual puede calcularse analíticamente para una gran variedad de ventanas. De este modo, la *apodization* puede corregirse al dividir la imagen por la función de *deapodization*. En la práctica, es frecuente dividir la imagen solo por una parte de la función de *apodization*. Una forma de limitar la *deapodization* es dividir la imagen en todo el campo de vista de la imagen *FOV field of view* por la función  $c(x, y) + a$  con  $a$  constante, en lugar de  $c(x, y)$ , de tal modo que la imagen reconstruida es:

$$\hat{m}(x, y) = \frac{1}{c(x, y) + a} \left\{ [m(x, y) * s(x, y)] \cdot c(x, y) \right\} * III \left( \frac{x}{FOV_x}, \frac{y}{FOV_y} \right) \quad (11)$$

### 3.4. Sobremuestreo del Espacio K

En los casos considerados, se tiene el problema de la réplica de los lóbulos laterales, los cuales tiene la misma amplitud de la imagen deseada, en los bordes del *FOV*, el cual es una medida de la dimensión de la imagen. El problema consiste en la inexistencia de una banda de transición, esto es consecuencia directa de la reconstrucción de la imagen a partir de una cuadrícula del mismo número de muestras, que los datos

en el espacio  $k$ , denominada cuadrícula  $1X$ . Así, la densidad de la cuadrícula se selecciona a un tamaño mayor que la densidad de los datos del espacio  $k$ , de tal forma se reduce tanto el efecto de *apodization* como el *aliasing*. Se introduce un factor de incremento de densidad de la cuadrícula, de modo que ahora se emplea una cuadrícula en el espacio  $k$ :

$$\left( \frac{\Delta k_x}{\alpha}, \frac{\Delta k_y}{\alpha} \right) \quad (12)$$

## 4. TRANSFORMADA RÁPIDA NO UNIFORME DE FOURIER (NUFFT)

El corazón de la reconstrucción iterativa de imágenes de muestras no uniformes en la frecuencia es la NUFFT hacia delante [3]. La cual puede ser definida de la siguiente forma: Definiendo  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  donde  $\xi_k \in [-\pi, \pi]$  como un vector de frecuencias no uniformemente distribuidas y  $f = (f_{-N/2}, \dots, f_{(N/2)-1})$  donde  $f_n \in \mathbb{C}$  como un vector de muestras de la señal complejo. La Transformada No Uniforme de Fourier está definida por [6]:

$$F_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f_n \exp(-in\xi_k) \quad (13)$$

con  $n$  entero, en notación matricial:

$$F = \Psi f \quad (14)$$

donde  $\Psi \in \mathbb{C}^{K \times N}$  ( $K \geq N$ ) es una matriz de rango completo que contiene  $K$  funciones exponenciales discretas en sus filas.

Una aproximación rápida  $T$  del operador no uniforme de Fourier puede ser realizada proyectando la señal  $f$  en alguna base uniforme sobremostrada de Fourier  $\Phi \in \mathbb{C}^{q \times K \times N}$  usando la FFT estándar y empleando luego un método de interpolación.

$$F \approx Tf = U_p \Phi f \quad (15)$$

donde  $U_p$  denota el operador interpolación. Recientemente, Fessler y Sutton [5], [6] proponen obtener coeficientes de interpolación que minimizan el máximo error de aproximación. Este acercamiento puede ser formulado como un problema min.-máx.

$$\min_{u_k} \max_{\|f\|_2 \leq 1} |u_k \Phi_p^k f - \Psi_k f|^2 \quad (16)$$

donde  $u_k$  es la parte no cero de la fila  $k$ -ésima de la matriz de interpolación  $U_p$ ,  $\Phi_p^k$  es la parte de la base sobremuestreada de Fourier  $\Phi$ , conteniendo  $p$  vecinos más cercanos de los elementos de la base no uniforme  $\psi_k$  y  $\|f\|_2^2 = \langle f \rangle^2$  denota la norma sub-dos de  $f$ .

#### 4.1. Transformada inversa rápida no uniforme de Fourier

Una solución sencilla del problema inverso de la Ec. (14) es una operación computacionalmente extensa, la cual está dada por la pseudo inversa Moore-Penrose:

$$f = \Psi^+ F = (\Psi^H \Psi)^{-1} \Psi^H F \quad (17)$$

el superíndice H denota transpuesta Hermitiana. Sin embargo, tal solución es prácticamente imposible cuando el número total de muestra N es grande, puesto que necesita de la inversión de una matriz de  $N^2 \times N^2$  en el caso 2D. Alternativamente, la Ec. (17) puede ser reformulada como un problema de minimización del error de la señal reconstruida:

$$\min_f \|Tf - F\|_2^2 \quad (18)$$

El problema puede ser resuelto iterativamente con varias técnicas de resolución de ecuaciones integro-diferenciales no lineales, dentro de tales métodos se propone en la presente investigación el uso del método no lineal del Gradiente Conjugado [7] con la fórmula de actualización de Fletcher – Reeves.

### 5. SIMULACIONES DE MONTECARLO

La palabra simulación se refiere a un programa de tipo computacional, basado en modelos probabilísticos a fin de imitar un sistema real, caracterizar o establecer relaciones entre variables especialmente cuando otros tipos de análisis son complejos matemáticamente o existen dificultades para reproducir un experimento y los métodos de Montecarlo abarcan una colección de técnicas estocásticas.

#### 5.1. Ruido en IRM

Recientes investigaciones se refieren al ruido térmico como principal elemento perturbador en el sistema de recepción de la señal de resonancia magnética [12]. Además, puede mostrarse que el ruido térmico se caracteriza por una

función de densidad de probabilidad Gaussiana con media nula [12]. Por tal razón las simulaciones de Montecarlo se realizan con señales contaminadas con ruido Gaussiano.

#### 5.2. Reconstrucción de IRM

Las reconstrucciones se realizan sobre el *phantom* de Shepp-Logan y un *phantom* compuesto por seis circunferencias. La Ec. (6) determina la expresión analítica de la transformada continua de Fourier de cualquier *phantom*, la cual es la base para la adquisición no uniforme de los datos IRM, mediante muestreo en trayectoria espiral. La reconstrucción *Gridding* simple sobre una cuadrícula 1X, es un operador que no realiza la corrección de la densidad de muestreo, ni *deapodization* [8], Figura 5 (a).

Una reconstrucción *Gridding* con precompensación de la densidad de muestreo se muestra en la Figura 5 (b). La función de compensación de densidad se calculó mediante el diagrama de Voronoi [10], ver Tabla I. La Figu-

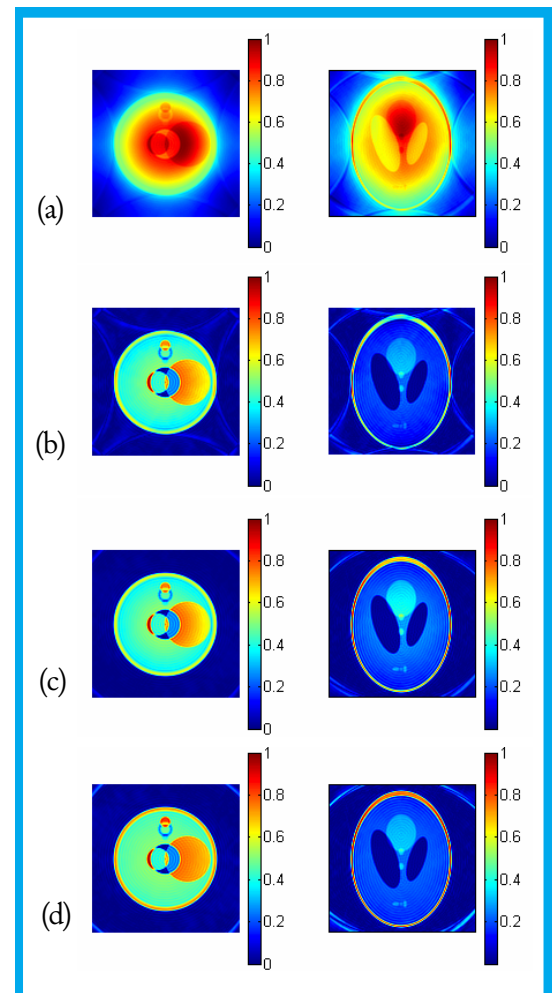


Figura 5. Reconstrucción *Gridding* en señales no ruidosas.



ra 5 (c) muestra la reconstrucción *Gridding 2X*. Cabe notar que es posible incrementar la densidad de la cuadrícula cartesiana a un valor mayor e incluso en valores no enteros.

La Figura 5 (d) muestra la reconstrucción *Gridding 2X* con precompensación de densidad de muestreo mediante diagramas de Voronoi, y *deapodization* parcial. Se introduce un índice de *deapodization*, tal como se describe en la Ec. (11). Ver Tabla II.

En la Tabla I, se muestran los valores de error cuadrático medio para distintos índices de precompensación, esto es, la variación o delta de la función de precompensación entre sus niveles máximo y mínimo, sin supresión del nivel D.C. de la señal.

En la Tabla III, se muestran los valores del error cuadrático medio de reconstrucción, empleando el método convencional *Gridding*, para una adquisición sin ruido.

### 5.3. Reconstrucción iterativa

En la Tabla IV se listan los 20 primeros valores del error cuadrático de reconstrucción en el método iterativo, empleando el método del gradiente conjugado con la fórmula de actualización de

Tabla I. Error cuadrático medio de reconstrucción en el método *Gridding* y precompensación.

Índice de precompensación	eRMS	
	Phantom 1	Phantom 2
0,0	0,0356	0,1563
0,2	0,0343	0,1550
0,4	0,0325	0,1456
0,6	0,0283	0,1110
0,8	0,0227	0,0761
1,0	0,0105	0,0191

Phantom 1: Phantom de prueba de seis (6) circunferencias.

Phantom 2: Phantom de Shepp – Logan.

Tabla II. Error cuadrático medio de reconstrucción en el método *Gridding 2X* con precompensación de densidad de muestreo mediante diagramas de Voronoi y *deapodization* parcial.

Índice de <i>deapodization</i>	eRMS		
	Phantom 1	Phantom 2	PI + P2
2,5	0,01514	0,00725	0,02238
2,6	0,01515	0,00723	0,02238
2,7	0,01517	0,00721	0,02238
2,8	0,01519	0,00719	0,02238
2,9	0,01520	0,00717	0,02237
3,0	<b>0,01522</b>	<b>0,00716</b>	<b>0,02237</b>
3,1	0,01523	0,00714	0,02238
3,2	0,01525	0,00713	0,02238
3,3	0,01526	0,00712	0,02238
3,4	0,01528	0,00710	0,02238
3,5	0,01529	0,00709	0,02238

Tabla III. Comparación del error cuadrático medio de reconstrucción en los métodos *Gridding*.

Método de Reconstrucción	eRMS	
	Phantom 1	Phantom 2
<i>Gridding</i> Simple	0,0356	0,1563
<i>Gridding</i> con Precompensación de Densidad 1X	0,0105	0,0191
<i>Gridding</i> con Precompensación de Densidad 2X	0,0100	0,0150
<i>Gridding</i> con Precompensación de Densidad 2X y <i>Deapodization</i>	0,0071	0,0152

Fletcher-Reeves para la minimización del error de reconstrucción mediante aplicación del operador directo rápido no uniforme de Fourier, así se observa que este error posee un valor asintótico, que evidencia el error de aproximación en la aplicación del operador rápido no uniforme de Fourier. Así mismo en la Figura 6 se muestra las imágenes en la 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> (a), (b) y 15<sup>a</sup> (c) iteración.

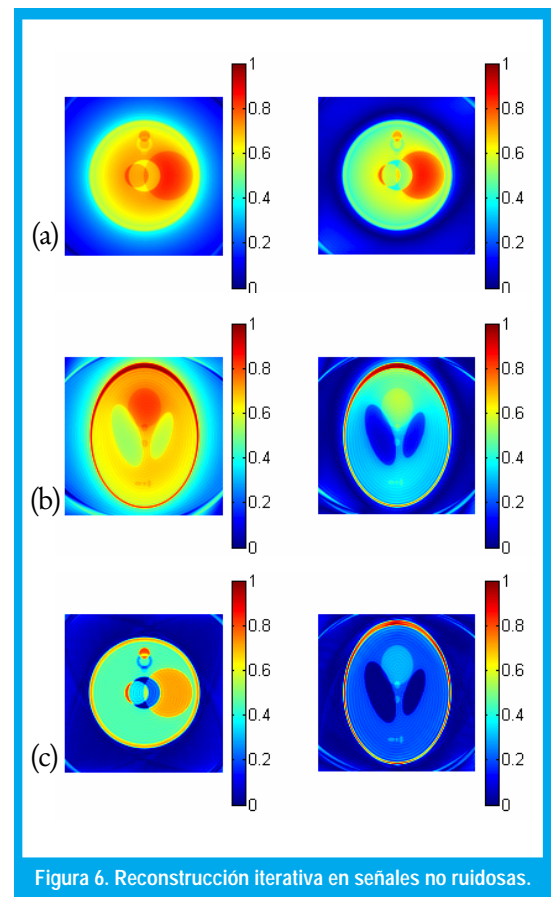


Figura 6. Reconstrucción iterativa en señales no ruidosas.

### 5.4. Reconstrucción en presencia de ruido

Las muestras no uniforme se contaminan con ruido blanco Gaussiano a valores de relación señal a ruido de 5, 10, 15, 20, 25 y 30 dB. Se caracteriza la función aleatoria de error cuadrático de reconstrucción, mediante la aplicación de métodos de simulación de Montecarlo.

El número de ensayos para calcular los promedios estadísticos se determina mediante ob-

servación de la variación de los promedios estadísticos en función del número de ensayos, lo que corresponde a determinar el  $k$ -ésimo ensayo en el que la derivada de la esperanza y la varianza sea aproximada a cero, en el caso específico un valor de variación igual a  $10^{-5}$  determina este número de ensayos, Tabla V. En la Figura 7 se muestran los cortes transversales de los *phantoms* 2D reconstruidos por ambos métodos: el método iterativo y el método convencional *Gridding*.

Tabla IV. Error cuadrático medio de reconstrucción en el método iterativo propuesto.

Número de Iteración	eRMS	
	Phantom 1	Phantom 2
Iteración 1	0,0593	0,1777
Iteración 2	<b>0,0166</b>	<b>0,0291</b>
Iteración 3	0,0149	0,0311
Iteración 4	0,0132	0,0205
Iteración 5	0,0119	0,0210
Iteración 6	0,0116	<b>0,0173</b>
Iteración 7	<b>0,0100</b>	0,0172
Iteración 8	0,0097	0,0159
Iteración 9	0,0085	0,0156
Iteración 10	0,0085	0,0151
Iteración 11	0,0077	<b>0,0149</b>
Iteración 12	0,0078	0,0148
Iteración 13	0,0074	0,0146
Iteración 14	0,0075	0,0147
Iteración 15	<b>0,0071</b>	<b>0,0145</b>
Iteración 16	0,0073	0,0147
Iteración 17	<b>0,0070</b>	0,0146
Iteración 18	0,0072	0,0148
Iteración 19	0,0070	0,0147
Iteración 20	0,0072	0,0149

Tabla V. Número de ensayos en función de la relación señal a ruido para lograr una variación de error de  $10^{-5}$ .

Relación Señal a Ruido SNR (dB)	Número de Ensayos
	1,00E-05
5	78
10	54
15	42
20	37
25	34
30	31

## 6. CONCLUSIONES

El problema dominante en el operador *Gridding* simple es el excesivo componente D.C. debido a que la trayectoria espiral sobremuestra las bajas frecuencias. Se observa además el efecto de réplicas y *aliasing* por causa de la convolución entre la imagen ideal y la transformada de Fourier de la función de muestreo no uniforme y el re-muestreo rectilíneo en el espacio  $k$ . Las réplicas que se presentan en la imagen

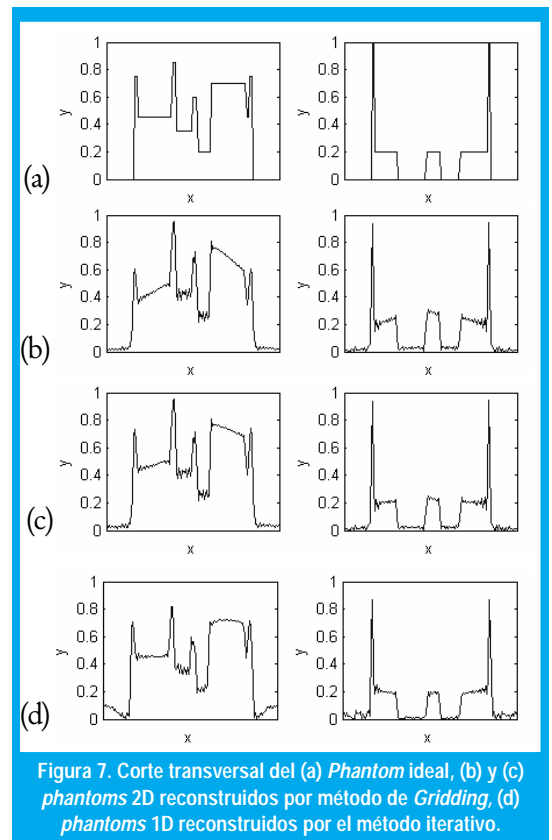


Figura 7. Corte transversal del (a) *Phantom* ideal, (b) y (c) *phantoms* 2D reconstruidos por método de *Gridding*, (d) *phantoms* 1D reconstruidos por el método iterativo.

producto del re-muestreo cartesiano, pueden reducirse por medio de un sobremuestreo en el espacio  $k$ .

La elección del índice de *deapodization* en el método de reconstrucción convencional es un compromiso entre compensar los efectos del re-muestreo cartesiano (réplicas) o los efectos de la función de convolución (*apodization*). En el método de reconstrucción *Gridding* se observa una disminución del error cuadrático medio de reconstrucción a medida que aumenta la variación de valor pico a pico de la función de precompensación, siempre que el valor mínimo de la función sea estrictamente igual a 0, eliminación de la componente D.C. de la señal.

El error de reconstrucción en el método iterativo posee un valor asintótico, que evidencia el error de aproximación en la aplicación del operador rápido no uniforme de Fourier. Es de anotar que en el método iterativo propuesto no se realiza precompensación de la densidad de muestreo, lo cual constituye una de las ventajas del método iterativo en comparación al método convencional. Así mismo tampoco se realiza *deapodization* de la imagen reconstruida.

Sin embargo, existe un aumento en las réplicas debidas al muestreo no uniforme en trayectoria espiral, aún así se logra obtener mejores resultados y se reduce la complejidad de la técnica de reconstrucción en este aspecto, aunque se agregan técnicas adicionales en la actualización de la dirección del gradiente conjugado de búsqueda, pero esencialmente se incrementa la complejidad en la incorporación de la técnica de búsqueda lineal. El número de ensayos es función de la mínima variación permitida en las observaciones y la relación señal a ruido.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]. Bagchi, S., Mitra, S.K., «Nonuniform Discrete Fourier Transform and its Signal Processing Applications», Norwell, M.A.: Kugler, 1999.
- [2]. Bronstein, M. Bronstein, A. Zibulevsky, M. Azhari, H. «Reconstruction in ultrasound diffraction tomography using non-uniform FFT», IEEE Transaction on Medical Imaging, Vol. 21 No. 11, pp. 1395-1401, November 2002.
- [3]. Bronstein, M. Bronstein, A. Zibulevsky, M., «The non-uniform FFT and some of its applications», pp. 1-51, November 2002.
- [4]. Cooley, J. W. Tukey, J.W. «An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series». Mathematical computation, Vol. 19, pp 297-301, April 1965.
- [5]. Fessler, J.A. Sutton, B.P., «Nonuniform Fast Fourier Transforms Using Min-Max Interpolation». IEEE Transaction on Signal Processing, Vol. 51, pp 560-574, February 2003.
- [6]. Fessler, J.A. Sutton, B.P. «A min-max approach to the multidimensional nonuniform FFT: Application to tomographic image reconstruction,» Proceedings IEEE International Conference on Image Processing, Vol. 1, pp. 706-9, 2002.
- [7]. Gilbert, J.C. Nocedal, J., «Global Convergence Properties of Conjugate Gradient Methods for Optimization». SIAM Journal on Optimization, Vol. 2, No. 1, pp. 21-42, 1992.
- [8]. Jackson, J.I. Meyer, C.H. Nishimura, Dwight G. Macovski, Albert. «Selection of a Convolution Function for Fourier Inversion Using Gridding». IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol. 10, No. 3, pp 473 – 478, September 1991.
- [9]. Oppenheim, A. Johnson, D, «Computation of spectra with unequal resolution using the fast Fourier transform», Proceedings. IEEE, Vol. 59, pp. 299-301, 1971.
- [10]. Rasche, V., Proska, R., Sinkus, R., Boerner, P., Eggers, H. «Resampling of data between arbitrary grids using convolution interpolation», IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol. 18, No. 5, pp 385-392, 1999.
- [11]. Shepp, Lawrence. A. Logan B. F. «The Fourier reconstruction of a head section», IEEE Transactions on Nuclear Sciences, Vol. 21, No. 3, pp. 21-43, June 1974.
- [12]. Sijbers, J, «Signal and Noise Estimation from Magnetic Resonance Images», Ph.D. Thesis, Department of Physics, University of Antwerp, Antwerp (Belgium), 1999.
- [13]. Stuart, C. «Functional MRI: Methods and Applications». [www.fmrib.ox.ac.uk/~stuart](http://www.fmrib.ox.ac.uk/~stuart), September 2000.

---

### Héctor Cristyan Manta Caro

Ingeniero Electrónico – U. Distrital. Estudiante Maestría en Ciencias de la Información y las Comunicaciones – U. Distrital.  
[hcmantac@udistrital.edu.co](mailto:hcmantac@udistrital.edu.co)

---

### Héctor Fernando Cancino de Greiff

Ingeniero Electrónico – U. Distrital, MSc. Sistemas Digitales – U. Central de Venezuela. Dr. en Ciencias Técnicas – U. Central de las Villas, Cuba. Profesor Asociado – U. Distrital.  
[fcancino@udistrital.edu.co](mailto:fcancino@udistrital.edu.co)