Revista Científica

No 20

septiembre-diciembre

2014

ISSN 0124-2253

Preparación editorial y diseño
Editorial UD
Jefe sección de Publicaciones
Rubén Eliécer Carvajalino Carvajalino
Coordinación editorial
Nathalie De la Cuadra N.
Corrección de estilo
Matilde Salazar Ospina
Corrección de estilo para inglés
Claudia Yanive Prieto
Diagramación
María Paula Berón
Impresión
Editorial UD

Naturaleza Revista Científica
Periodicidad
Cuatrimestral

Cobertura
Nacional e internacional para académicos, investigadores y profesionales de ciencias naturales y humanas.

Misión y naturaleza
La misión de la *Revista Científica* es difundir artículos originales, de alta calidad técnica y científica elaborados por los miembros de la comunidad académica y profesional nacional e internacional, producto de proyectos de investigación en las áreas de las ciencias, las ingenierías y la educación científica, así como artículos de revisión y actualización, u otros trabajos que contribuyan al conocimiento y desarrollo del país.

Indexación
La Revista Científica esta indexada en **Publindex C** (Sistema Nacional de Indexación de Revistas Científicas Colombianas), en **Latindex** (Directorio de Publicaciones Científicas de América Latina). Se encuentra en bases de datos como: **e-revist@s, CIT** (centro de información tecnológica) **DOAJ**.

Forma de adquisición
Suscripción

Dirección postal
Carrera 7 # 40-53, piso 3, Bogotá, Colombia

Correo electrónico:
revcientifica-viiceps@correo.udistrital.edu.co

Página web:
http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Contenido

EDITORIAL

Del conocimiento cotidiano al conocimiento estocástico

En el presente, los ciudadanos se enfrentan diariamente a una gran cantidad de información de tipo estadístico, es recurrente el uso en los medios de comunicación de encuestas, sondeos de opinión, entrevistas a expertos, entre otros. En general, la utilización de la estadística tiene como propósito garantizar la confiabilidad de la información o validar las decisiones que se toman en los diferentes escenarios sociales políticos, deportivos. Como respuesta a estas necesidades de análisis y comprensión por parte de los ciudadanos, la estadística y la probabilidad se encuentra inmersa de forma directa, o indirecta, en casi todos los diseños curriculares en el país, desde los niveles básicos hasta los profesionales.

Históricamente, se constata que alrededor de los años cincuenta del siglo pasado se puede observar la inserción de forma explícita y definitiva de los métodos estadísticos, en casi todos los programas de Ingeniería en Colombia y también empieza a formar parte de la cultura de los ciudadanos. Esta inclusión concuerda con el desarrollo histórico, particularmente de la estadística, ya que esta disciplina había o estaba sentando las bases teóricas para seleccionar muestras aleatorias, diseñar experimentos, comprobar hipótesis a partir de información observada, analizar datos de tipo cualitativo y cuantitativo y, tal vez el más importante de todos los procesos, permitir la validación de teorías. Alternamente, por la reunión de diferentes acontecimientos de tipo histórico, teórico y social, se fortaleció el estudio de la probabilidad, y se reconoció como una alternativa de estudio para muchos fenómenos, debido a que esta teoría permitía explicar el comportamiento de una gran cantidad de variables y modelar muchas situaciones. Esta nueva concepción permitió la emergencia de nuevos tipos de razonamientos donde la incertidumbre, el azar y la aleatoriedad se encuentran presentes, confrontado la idea de pensamiento determinístico que, en muchos espacios académicos, la ciencia defendía.

Pese a la consolidación de la didáctica de la estocástica, actualmente se ha encontrado que aún son escasas las investigaciones sobre cómo se realiza la enseñanza de la probabilidad y la estadística, en las facultades de ingeniería y si verdaderamente estos conceptos son utilizados por los ingenieros cuando desarrollan su actividad como profesionales o cuando toman decisiones utilizando información estadística como ciudadanos. Igualmente, es insuficiente la información de quienes son los responsables de la educación estadística en las universidades, de las formas de enseñanza, de las maneras de evaluación, no se sabe en qué medida las propuestas de enseñanza se han desarrollado, cómo se estructuraron los diseños curriculares, los espacios de formación en estocástica y cómo se han venido transformando en el tiempo, así como las razones de tales evoluciones.

Sin entrar en consideraciones sobre la naturaleza de éstas interacciones entre el conocimiento cotidiano, la cultura estadística y la didáctica de la estadística, es necesario estudiar la importancia de estas relaciones y su influencia en la educación formal e informal, dada la importancia que este tipo de conocimiento tiene sobre la toma decisiones, en ocasiones de forma inconsciente o a partir de la experiencia adquirida en el entorno y en la escuela.

Dr. Pedro Rocha Salamanca
Dra. Patricia Gallego Torres
Editores Revista Científica

EDITORIAL

Conhecimento do conocimeinto estocástico diário

Actualmente, os cidadãos enfrentam diariamente uma grande quantidade de informação estatística é o uso recorrente em pesquisas de mídia, enquetes, entrevistas com especialistas, entre outros. Em geral, o uso de objetivos estatísticos para garantir a fiabilidade da informação ou validar as decisões tomadas em diferentes político, ostentando ambientes sociais. Em resposta a estas necessidades de análise e compreensão pelos cidadãos, estatística e probabilidade está imerso directa, ou indirectamente, em quase todos os currículos no país, desde o básico até os níveis profissionais.

Historicamente, vemos que entre os anos cinqüenta do século passado pode ser visto inserindo forma explícita e definitiva de métodos estatísticos em quase todos os programas de engenharia na Colômbia e torna-se parte da cultura dos cidadãos. Esta inclusão é consistente com o desenvolvimento histórico, particularmente nas estatísticas, uma vez que esta disciplina era ou estava lançando as bases teóricas para a seleção de amostras aleatórias, projetando experiências, testar hipóteses a partir de dados observados, analisar o tipo de dados qualitativos e quantitativos e tal Uma vez que o mais importante de todos os processos, o que permite a validação das teorias. Como alternativa, para a reunião de diferentes eventos de importância histórica, teórica e social, o estudo de probabilidade foi reforçada, e foi reconhecido como uma alternativa de estudo para muitos fenômenos, porque esta teoria autorizados a explicar o comportamento de um grande número de variáveis e modelo muitas situações. Este novo conceito permitiu o surgimento de novos tipos de raciocínio onde a incerteza, o acaso e aleatoriedade estão presentes, diante da idéia de pensamento determinista que em muitas áreas acadêmicas, ciência defendeu.

Apesar da consolidação do ensino estocástico, ele agora se que ainda há pouca pesquisa sobre como o ensino de probabilidade e estatística nas escolas de engenharia é realizada e se de fato esses conceitos são utilizados por engenheiros quando eles operam como profissionais ou na tomada de decisões utilizando informação estatística como cidadãos. Da mesma forma, não há informação suficiente daqueles que são responsáveis pela educação estatística nas universidades, formas de ensino, formas de avaliação, não é claro em que medida as propostas de ensino foram desenvolvidos, como os projetos foram estruturados currículo, a formação de espaços estocástica e como eles se transformaram ao longo do tempo, e as razões para tais mudanças.

Sem entrar na natureza dessas interações entre conhecimento cotidiano, literacia estatística eo ensino da estatística, é necessário estudar a importância desses relacionamentos e sua influência na educação formal e informal, dada a importância deste tipo de conhecimento tem na tomada de decisões, às vezes inconscientemente, ou a partir da experiência adquirida com o meio ambiente e na escola.

Dr. Pedro Rocha Salamanca
Dra. Patricia Gallego Torres

EDITORIAL

From everyday knowledge to stochastic knowledge

At present, citizens face daily a large amount of statistical information is recurrent use in media surveys, polls, interviews with experts, among others. In general, the use of statistical aims to ensure the reliability of the information or validate the decisions made in different political, sporting social settings. In response to these needs analysis and understanding by citizens, statistics and probability is immersed directly, or indirectly, in almost all curricula in the country, from basic to professional levels.

Historically, we see that around the fifties of the last century can be seen inserting explicit and definitive form of statistical methods in almost all engineering programs in Colombia and becomes part of the culture of citizens. This inclusion is consistent with the historical development, particularly in statistics, since this discipline was or was laying the theoretical basis for selecting random samples, designing experiments, testing hypotheses from observed data, analyze qualitative and quantitative data type and such Once the most important of all processes, allowing validation of theories. Alternately, for the meeting of different events of historical, theoretical and social, the study of probability was strengthened, and was recognized as an alternative of study for many phenomena, because this theory allowed to explain the behavior of a large number of variables and model many situations. This new concept allowed the emergence of new types of reasoning where uncertainty, chance and randomness are present, confronted the idea of deterministic thinking that in many academic areas, science defended.

Despite the consolidation of teaching stochastic, it has now been found that are still little research on how the teaching of probability and statistics in engineering schools is performed and if indeed these concepts are used by engineers when they operate as professionals or when making decisions using statistical information as citizens. Similarly, there is insufficient information from those who are responsible for statistical education at universities, forms of teaching, ways of evaluation, it is unclear to what extent the teaching proposals were developed, how the designs were structured curriculum, training spaces stochastic and how they have been transformed over time, and the reasons for such changes.

Without entering into the nature of these interactions between everyday knowledge, statistical literacy and the teaching of statistics, it is necessary to study the importance of these relationships and their influence on formal and informal education, given the importance of this type of knowledge has on decision making, sometimes unconsciously or from experience gained in the environment and in school.

Dr. Pedro Rocha Salamanca

Dra. Patricia Gallego Torres

Sección educación científica

Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento matemático a partir de situaciones del entorno métrico[1]

Teaching strategies to enhance mathematical thinking from environmental situations metric

Ensinar estratégias para melhorar o pensamento matemático a partir de situações ambientais métrica

Fecha de recepción: marzo de 2014

Fecha de aceptación: julio de 2014

Alfonso Eduardo Chaucanés Jácome[2]

Jairo Escorcia Mercado[3]

Eugenio Therán Palacio[4]

Atilano Rafael Medrano Suárez[5]

Resumen

En el presente artículo se comparten los frutos de una investigación sobre algunas estrategias tendientes a potenciar el pensamiento métrico en estudiantes de noveno grado de Educación Básica, a través de situaciones problema del contexto sociocultural y de las ciencias, bajo un diseño cualitativo. Se realizó un análisis didáctico, en relación con la comprensión de los conceptos, procedimientos y aplicaciones del pensamiento métrico, de los abordajes y soluciones de los estudiantes a las 15 situaciones de la prueba diagnóstica y de la prueba de contraste, diseñadas para reconocimiento de posibles dificultades de los estudiantes y para valorar el logro de las estrategias aplicadas, y algunas de la intervención en el aula usadas para superación de las dificultades detectadas.

Palabras clave: pensamiento matemático, enseñanza, metodología de trabajo en el aula, estrategia didáctica, matemáticas escolares.

Abstract

This article will share the fruits of research on some strategies to promote thinking metric freshmen Basic Education through sociocultural problem situations and science under a qualitative design. Training analyzes will be made in relation to the understanding of the concepts, procedures and applications of thinking metrically, approaches and solutions to the

1 Artículo de investigación.

2 Universidad de Sucre, Sincelejo (Colombia). Contacto: chaucane@yahoo.com.mx

3 Universidad de Sucre, Sincelejo (Colombia). Contacto: escorciamercadojairo@yahoo.es, jairo.escorcia@unisucre.edu.co

4 Universidad de Sucre, Sincelejo (Colombia). Contacto: eugeniotheran@unisucre.edu.co

5 Universidad de Sucre, Sincelejo (Colombia). Contacto: amedrasu@hotmail.com

fifteen students diagnostic test situations and contrast test, designed to recognize possible difficulties of students and to assess the achievement of the strategies applied, and some of the classroom intervention used to overcome the difficulties encountered.

Keywords: Mathematical thinking, teaching, methodology of work in the classroom, teaching strategy, school mathematics.

Resumo

Este artigo irá compartilhar os frutos da investigação sobre algumas estratégias para promover o pensamento calouros métricas educação básica por meio de situações-problema sócio-culturais e de ciência em um projeto qualitativo. Formação análises serão feitas em relação à compreensão dos conceitos, procedimentos e aplicações de pensar metricamente, abordagens e soluções para os quinze estudantes situações de teste de diagnóstico e teste de contraste, destinadas a reconhecer possíveis dificuldades de estudantes e para avaliar o sucesso das estratégias aplicadas, e alguns de sala de aula da intervenção utilizada para ultrapassar as dificuldades encontradas.

Palavras-chave: pensamento matematico, ensino, metodologia de trabalho na estrategia de ensino em sala de aula, a matematica escolar.

Introducción

en el primer semestre de 2013 el grupo de investigación Pensamiento Matemático (PEMA) culminó el desarrollo de la investigación *Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento matemático a partir de situaciones del entorno métrico en estudiantes de educación básica y media del municipio de Sincelejo*, la cual contempló tres fases: diagnóstica, intervención y valoración de las estrategias y logros alcanzados por los estudiantes; se abordó la pregunta de investigación: ¿qué estrategias didácticas posibilitarían potenciar el pensamiento matemático en estudiantes de educación básica y media del municipio de Sincelejo, de tal manera que haya correspondencia entre los procesos de formación en la línea del pensamiento métrico con las competencias específicas de la matemática? La aplicación de la prueba diagnóstica permitió corroborar que a nivel general existe un bajo nivel de desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes. Frente a estas dificultades, en la etapa de intervención se implementó un trabajo de aula con la resolución de alrededor de 30 situaciones problema, teniendo en cuenta los indicadores de los estándares del pensamiento métrico, en un curso del grado noveno de la Institución Educativa Antonio Lenis de la ciudad de Sincelejo, Colombia. En la etapa de valoración de las estrategias se diseñó y aplicó, al mismo grupo que recibió el tratamiento, una prueba de contraste con categorías idénticas de la prueba diagnóstica, con el fin de validar la eficacia de las estrategias aplicadas. El contraste de los resultados evidenció que se lograron avances significativos en cuanto a la comprensión de los conceptos, procesos y aplicaciones ligados al pensamiento métrico, pero debe seguirse trabajando en el mejoramiento de estos logros.

De este acercamiento surgió una experiencia enriquecedora relacionada con los indicadores de los estándares sobre el pensamiento métrico, la cual se compartió con la comunidad de educadores de Asocolme en el ECME14 en la ciudad de Barranquilla, Colombia en el mes de octubre del año 2013, mediante el desarrollo de un curso corto, realizado en tres sesiones de 1.5 horas cada una. Con el desarrollo del curso se obtuvieron aportes de los participantes a las soluciones obtenidas con los estudiantes, pues a consideración del grupo PEMA merecen darse a conocer a la comunidad de educadores matemáticos, por su riqueza didáctica y como un ejemplo de la construcción social del conocimiento matemático, en tanto se dieron aportes en cadena en la siguiente dinámica: de la universidad a la escuela, de la escuela a la universidad, de ésta al ECME14 , del ECME14 a la universidad y de nuevo a la escuela, y viceversa , y en esta oportunidad nuevamente a la comunidad a través de este artículo. La misma dinámica o enfoque con el que se trabajó la resolución de las situaciones problema sobre el pensamiento métrico en la etapa de intervención, se utilizó en los diferentes escenarios universidad, escuela y ECME14, a saber: se proponen las situaciones problema, su abordaje, se obtienen las posibles soluciones según las interpretaciones de los estudiantes y socialización de éstas, conformándose así una cadena del proceso en otro escenario. Esta dinámica permite concluir que se obtendrán elaboraciones creativas cada vez tan amplias y ricas como el universo del pensamiento del ser humano.

Marco teórico

Del marco conceptual de la investigación culminada, se extraen los siguientes fundamentos teóricos (Escorcia, Chaucanes, Theran y Medrano, 2013). Vasco et al. (2006) definen los cinco tipos de pensamiento que hacen parte de la matemática, en especial el pensamiento métrico, el cual hace referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones.

Según el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) (2007), la competencia matemática de resolución de problemas se relaciona con la capacidad para formular problemas a partir de situaciones, dentro y fuera de la matemática, que implique traducir la realidad a una estructura matemática, desarrollar y aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida. Igualmente, verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema.

Para Freudhental (1991) el objetivo principal en la enseñanza de la matemática es matematizar la realidad cotidiana, en donde aprender matemáticas significa hacer matemáticas, una actividad mental reflexiva en torno a resolver problemas en contextos realistas. La resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje. Los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes, como a las aplicaciones en otras áreas.

Las estrategias en la solución de problemas se refieren a las operaciones mentales que los estudiantes utilizan para pensar sobre la representación de los datos, con el fin de transformar éstos en metas y alcanzar una solución. Las estrategias incluyen los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente.

Descripción de las actividades

Las tres sesiones del curso fueron: una sesión de socialización de los resultados de la investigación y dos sesiones de trabajo práctico de resolución de situaciones problema sobre el pensamiento métrico, la última complementada con el uso del software cabrí.

Las actividades realizadas constaron del abordaje y solución, y de los análisis didácticos respectivos de las situaciones usadas por el grupo en las pruebas de diagnóstico y contraste, y las usadas en el proceso de intervención en el aula. Además de algunas ya diseñadas en la asignatura *didáctica de las matemáticas* en el Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre (LIMA) en relación con el pensamiento métrico, y otras tomadas de olimpiadas internacionales de matemáticas. Las dos pruebas antes referidas, constan de ocho y siete situaciones respectivamente, y alrededor de 20 en la intervención, según los indicadores de los estándares del pensamiento métrico, relacionadas con los conceptos de magnitud y medida; los procesos de estimar, calcular, conservación de la cantidad y de aplicaciones en el contexto métrico.

A continuación se presentan, a modo de ejemplo, algunas de las situaciones que se trabajaron en el curso y se realiza la descripción del abordaje de ellas, poniendo de presente que la situación 1 se adaptó de su versión original de la *Revista Unión* No. 24 de diciembre de 2012 (p. 140)[6] y las situaciones 2 y 3 se adaptaron de la *Revista Olimpiada Matemática Estatal, Vitoria – Gastelz*, de junio de 20l2, la cual es difundida por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Situación 1. Un río empieza en el punto A; luego se divide en dos ramas, la primera se lleva 2/3 del agua y la otra el resto. Después la primera rama se divide en tres, una de ellas toma 1/8 del agua de esa rama, otra toma 5/8 y la otra rama, que lleva el sobrante, se une con la segunda rama original. ¿Qué proporción del río llega al punto B?

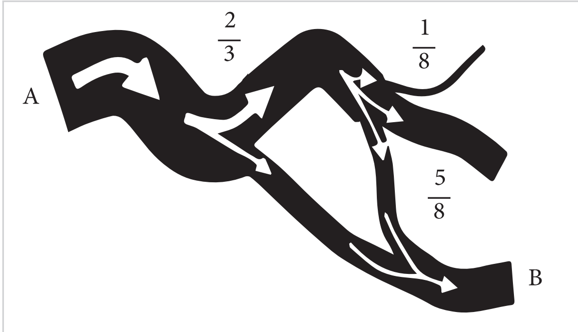


Figura 1

Fuente: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/32/revista32.pdf

Situación 2. Ana quiere repartir una torta cuadrada de 30 cm de lado entre cinco personas de forma que reciban la misma cantidad de torta. El primer corte lo hace partiendo del centro del cuadrado hasta el borde de la torta, a 10 cm de una esquina. Si el resto de cortes los hace también en línea recta y partiendo del centro, ¿cómo cortó la torta? Con la condición de que la longitud de cada trozo correspondiente al borde de la torta sea un número entero, indica entre cuántas personas podrían hacerse el reparto.

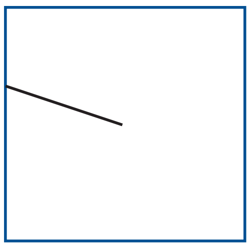


Figura 2

Fuente: elaboración propia

6 Esta revista es un órgano de difusión de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM)

Situación 3. Si el perímetro de la plancha es de 880 cm y el precio del material es de 50 €/m2. ¿Cuánto pagaremos por las cinco ventanas?

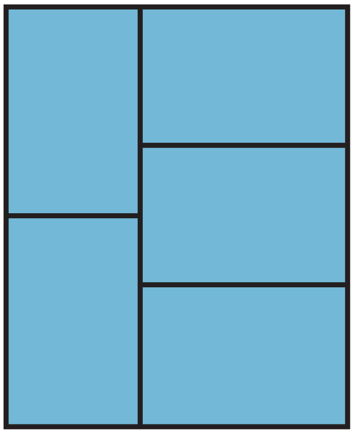


Figura 3

Fuente: http://www.smpm.es/index.php?option=com_content&view=article&id=141:problemas-de-la-fase-final-xix-olimpiada-matematica&catid=51:xix-edicion&Itemid=13

Tres soluciones, que se destacaron, dadas por estudiantes que cursaron la asignatura *Didáctica de las Matemáticas* de la Universidad de Sucre en el semestre 01 de 2013 a la situación 3 son:

Solución 1. Desde el pensamiento numérico, un estudiante (Daniel) establece que se deben buscar dos números, correspondientes a la base y a la altura de cada uno de los cinco rectángulos y que estén en relación 2 a 3; obteniendo así 80 cm para altura y 120 cm para la base. Por tanto, la plancha es de 200 cm por 240 cm, es decir de 2 m por 2,4 m y así el pago de las cinco ventanas es de 240 euros.

Solución 2. Desde el pensamiento métrico, una estudiante (Alexandra) usa un cuadrado de lado como unidad de medida, cuadriculando la plancha en 5 por 6 cuadros, de modo que el perímetro es 22 x, que al igualar con 880 cm obtiene a como 40 cm. Así la plancha es de 200 cm por 240 cm o de 2 m por 2,4 m, resultando que el pago de las cinco ventanas es de 240 euros.

Solución 3. Desde el pensamiento variacional, dos estudiantes (Carlos y Juan) establecen el sistema de ecuaciones lineales $4b+5a=880$ y $2b=3a$, siendo a la altura y b la base de cada uno de los cinco rectángulos, que al resolver resulta que la plancha es de 200 cm por 240 cm, o de 4,8 metros cuadrados y así el pago de las cinco ventanas es de 240 euros.

Estas soluciones son un ejemplo de cómo una misma situación puede resolverse desde el dominio del pensamiento del estudiante y no necesariamente desde donde los docentes la proyectan. En cada una se mira la correspondencia con los conceptos, procesos y contextos del pensamiento métrico.

En el evento se les socializó alrededor de unas tres o cuatro soluciones más construidas para la tercera situación. La mayoría de los participantes en el curso resolvió la situación uno, sumando 1/3 con 2/8, lo cual deja entrever que no conservan la unidad, se les hizo las debidas aclaraciones, obteniendo la solución correcta de un medio. La solución dos no fue abordada, se dejó propuesta para los participantes.

Situación problema abordada con los estudiantes

en este apartado se analiza cómo surgió el planteamiento de dos de las situaciones didácticas a trabajar con los participantes del curso en la sesión dos. A los estudiantes del primer semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas (LIMA) periodo 01 de 2013 de la Universidad de Sucre, Colombia, se les presentó, en la asignatura matemática escolar, la situación problema que el profesor inicia comentando en un lenguaje coloquial de la siguiente manera:

Se tiene un cuadrado al que se le recortó en una esquina otro cuadrado pequeño. Teniendo otra figura igual a esta y ensamblándolas por las esquinas recortadas, hay que determinar el perímetro y el área de la figura resultante, si el lado del cuadrado "mayor" mide 10 cm y el del cuadrado "menor" es 2 cm. El profesor plantea, "bueno vamos a ver cómo redactamos el texto de la situación de la mejor forma para una mejor comprensión".

Después de mirar posibilidades de comprensión e interpretación de lo que se solicitaba resolver, se elaboró con ellos diferentes redacciones del texto de la situación, convirtiéndose en un ejercicio interesante antes de proceder a resolver la situación:

R1: —Se tienen dos cuadrados de lados 10 cm cada uno. Se recorta en cada uno de ellos un cuadrado de lado 2 cm en una de sus esquinas. Al ensamblar las figuras obtenidas por dichas esquinas, ¿Qué perímetro y que área tiene la figura que se forma?

R2: —Dados dos cuadrados iguales de lados 10 cm, a los que se les recortó en una esquina un cuadrado de 2 cm de lado, ¿Qué perímetro y qué área tiene la figura que se forma al ensamblar los "cuadrados" por las esquinas recortadas?

R3: —En dos cuadrados de lados 10 cm de lados se recorta en cada uno un cuadrado de lado 2 cm en una de sus esquinas, ¿Qué perímetro y que área tiene la figura que se obtiene al ensamblar las figuras obtenidas por las esquinas recortadas?

R4: —La figura 4 representa un cuadrado de lado 10 cm, del cual se ha recortado un cuadrado de lado 2 cm. Ensamblando otra figura igual a esta, por la esquina recortada , obtenga el perímetro y el área de la figura que se obtiene.

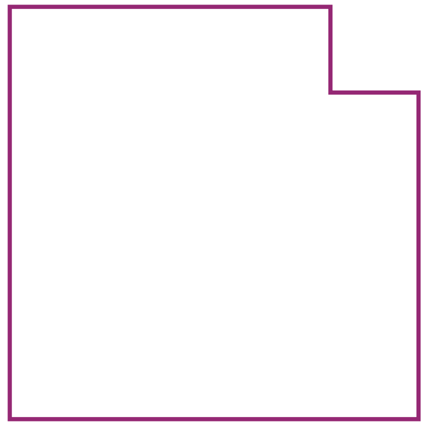


Figura 4

Fuente: elaboración propia

Después de cierto consenso de comprensión de la situación problema, los estudiantes elaboraron sus diseños y plantearon posibles estrategias de solución. Es de anotar que la situación se presentó en lenguaje verbal, aunque algunos estudiantes pidieron que, además del texto, se les dibujara la figura de lo que se les estaba pidiendo resolver; se les aclaró que era importante mirar la interpretación que ellos hacían de la situación dada. Además, la situación se basa en el concepto no matemático de ensamblar.

Situaciones problema para analizar con los docentes

A continuación se presenta una situación inicial trabajada con estudiantes de noveno grado en la fase de intervención de la investigación en la Institución Educativa Antonio Lenis de Sincelejo, Sucre, Colombia en noviembre de 2012.

- En un cuadrado de lado 10 cm, se ha recortado en una de sus esquinas un cuadrado de 2 cm de lado (figura 4). Con otra figura igual a ella se obtiene la figura 5, ¿Qué perímetro tiene ella?

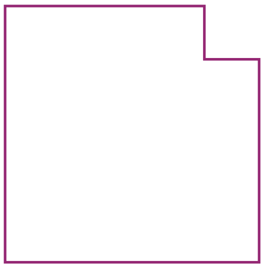


Figura 4

Fuente: elaboración propia

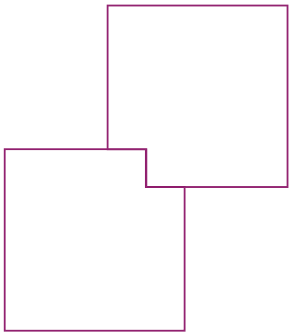


Figura 5

El rediseño de esta situación permitió desarrollar una clase en la asignatura Matemática Escolar en la línea de Didáctica de las Matemáticas, con los estudiantes de primer semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas (LIMA) de la Universidad de Sucre (Colombia) en el periodo semestral 01 de 2013. Se esperaba que los estudiantes dieran como respuesta la representación de la figura 5, y también otras que ellos lograsen construir creativamente.

Situación 1

A los estudiantes del primer semestre de LIMA período 01 de 2013, se les planteó resolver la siguiente situación problema:

- Dados dos cuadrados iguales de lados 10 cm, a los que se les recortó en una esquina un cuadrado de 2 cm de lado, ¿Qué perímetro y qué área tiene la figura que se forma al ensamblar los “cuadrados” por las esquinas recortadas?

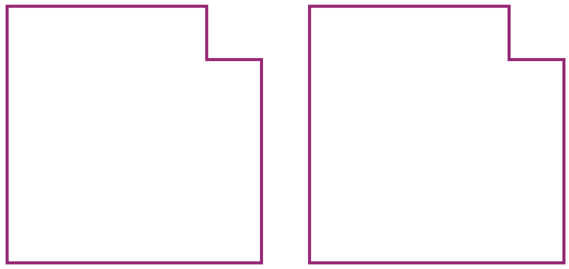


Figura 6

Fuente: elaboración propia

Situación 2

Un estudiante representa la situación mediante la figura 4 para dar su solución.

Figura 7

Fuente: elaboración propia

A continuación se darán a conocer y se analizarán las soluciones que presentaron los docentes participantes frente a cada situación problema; posteriormente, se socializarán las soluciones que presentaron los estudiantes con el fin de buscar puntos de encuentro y el aporte de la situación en la potenciación del pensamiento métrico.

Un grupo representó la situación 1 de manera diferente a las dadas por los estudiantes: una figura encima de la otra apoyándose en la esquina recortada

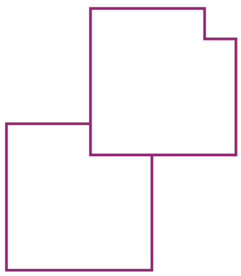


Figura 8

Fuente: elaboración propia

Otras soluciones propuestas por los estudiantes

A continuación se presentan las soluciones a la situación 1 propuestas por los estudiantes:

1. Los estudiantes colocan una enfrente de la otra y las unen encontrándose en las esquinas recortadas, tal como se muestra en la figura siguiente:

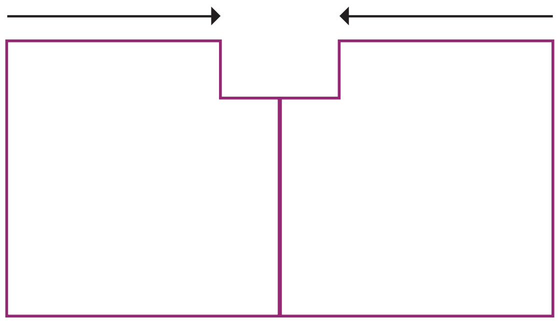


Figura 9

Fuente: elaboración propia

2. Los estudiantes unen las figuras de manera que se interceptan en dos puntos de las esquinas recortadas:

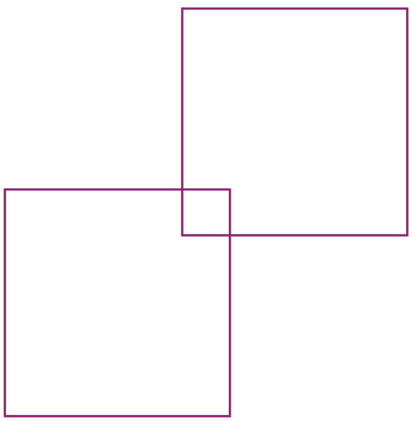


Figura 10

Fuente: elaboración propia

3. Los estudiantes deslizan una de las figuras sobre la otra como riel hasta recorrer la longitud del lado del cuadrado pequeño recortado:

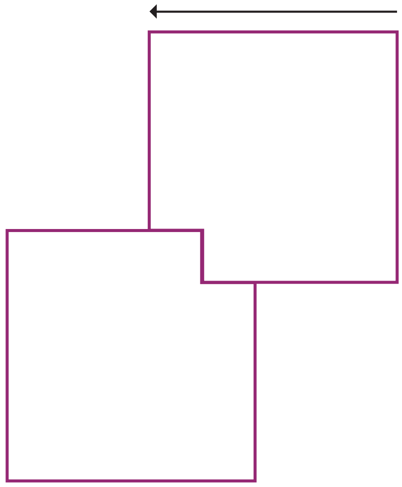


Figura 11

Fuente: elaboración propia

4. Los estudiantes colocaron una figura frente a la otra y unieron introduciendo seis segmentos de unidades cada uno, variable emergente en el planteamiento del problema, formando la figura tridimensional siguiente:

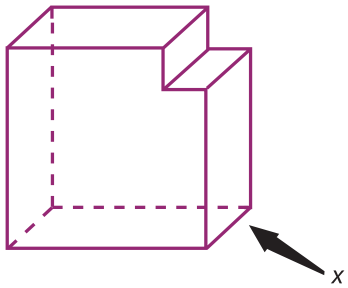


Figura 12

Fuente: elaboración propia

Es de notar que la solución planteada por el estudiante conduce al abordaje de expresiones algebraicas, al cálculo numérico de un polinomio cuando especifique un valor para x y a nuevos planteamientos, como por ejemplo el cálculo del volumen de la figura obtenida.

Análisis del desarrollo de las situaciones de aula

Hay situaciones que, en su abstracción, producen una interpretación que conlleva a una solución, pero al trasladarlas a un modelo real pueden presentar otras vías o alternativas de interpretación y respuestas. También se puede ventilar la situación desde lo particular a la abstracción general, tal como lo señala el referente didáctico propuesto por Piaget, Van Hiele, Freudhental, entre otros. Frente a las variadas soluciones presentadas por los estudiantes, es pertinente preguntar ¿*cuál es la correcta?*, esto induce a establecer una negociación de significados, al diálogo e institucionalización del saber, para escudriñar la producción matemática del estudiante y sus actitudes metacognitivas.

Usando la estrategia de un modelo de cuadrado en cartulina se presenta que los estudiantes ensamblan con o sin superposición de las figuras; en la figura 8 se presenta esta situación. Se entenderá como superposición la intersección de áreas entre las figuras, lo cual es una hipótesis nueva para el problema.

Se mostrarán algunos de los procesos seguidos con los estudiantes para obtener la solución del perímetro y del área en alguna de las figuras planteadas por ellos. Para este fin, en cada caso se iba mirando a qué tipo de elemento correspondía del pentágono CARCE, figura 13, la solución dada por el estudiante: redes conceptuales, estrategias varias, distintas formas de expresión, discursos, representaciones.

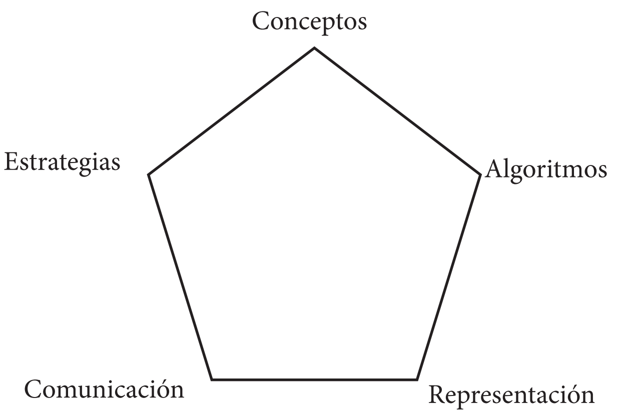


Figura 13. Pentágono CARCE

Fuente: elaboración propia

Además, se iba mirando a qué tipo de los cinco pensamientos correspondía o se enmarcaba la solución que estaban proponiendo. También se iba reconociendo a qué indicador correspondía de los estándares del pensamiento métrico, tal como se especifica en la siguiente tabla:

INDICADORES DE LOS ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO MÉTRICO	
Indicador	Tema
Conceptos	Magnitud
	Sistemas de medidas
Procesos	Cálculo
	Estimación
	Conservación
Contexto o actitudes	Aplicaciones

Tabla 1

Fuente: elaboración propia

Explotación de la situación

Consiste en hacer otros planteamientos o modificaciones a las condiciones de la situación dada, a fin de obtener procesos de generalización. Por ejemplo, realizar la situación cuando los cuadrados recortados son de lados diferentes; realizarla cuando varía el lado de los cuadrados a los que se le recorta el mismo cuadrado. Si en vez de dos cuadrados se cambia uno de los cuadrados por otra figura geométrica, o si en vez de recortar cuadrados se recortan otros tipos de figuras que sean semejantes.

Análisis de otras situaciones

Con las situaciones 1 y 2 del inicio también se puede hacer exploración de contexto, es decir, buscar generalizaciones posibles como plantear el problema con otra forma diferente de la torta: circular, poligonal, entre otros, también con otras bifurcaciones de las corrientes de agua.

El curso se desarrolló con la misma metodología de trabajo, descrita anteriormente en el numeral 3.4. A continuación se presentan otras situaciones trabajadas: las situaciones del cubo de Gruyére, la del cubo perforado y la del diseño de una bandera nueva, las cuales fueron modeladas en cabrí y resueltas analíticamente.

Situación del cubo gruyére

Un cubo de 3 por 3 tiene tres agujeros, cada uno con una sección de 1 por 1, que van desde el centro de cada cara en dirección a la cara opuesta, hasta que se encuentra y se une con otro agujero, ¿Cuál será la superficie total, en unidades cuadradas, del sólido que resulta?

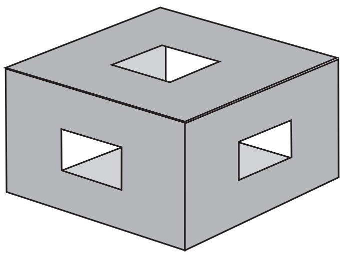


Figura 14

Fuente: http://www.smpm.es/index.php?option=com_content&view=article&id=38:xvi-edicion&catid=32:xvi-edicion&Itemid=13

Para ilustrar su solución, esta situación se modeló con el software cabrí así:

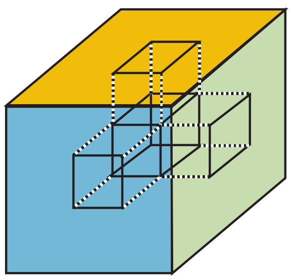


Figura 15

Fuente: elaboración propia

Una solución analítica consistió en mirar qué se conserva el área externa de las caras que es de 54 unidades cuadradas, pues las tres unidades de los orificios sólo se trasladaron hacia el interior del cubo, más 12 unidades cuadradas de las caras internas, para un total de 66 unidades cuadradas.

Situación del cubo perforado

Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

a) 88   b) 80   c) 70   d) 96   e) 85

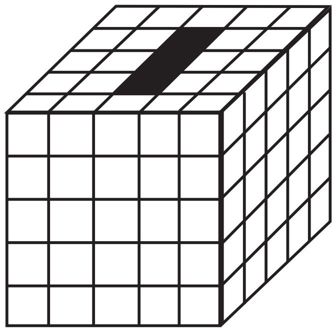


Figura 16

Fuente: tomado de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/CajaravilleFernGod06.pdf

La solución se modeló en cabrí rebanando el cubo, obteniendo las capas que se muestran en la figura 17, lo que permite verificar un conteo directo de 88 cubitos blancos

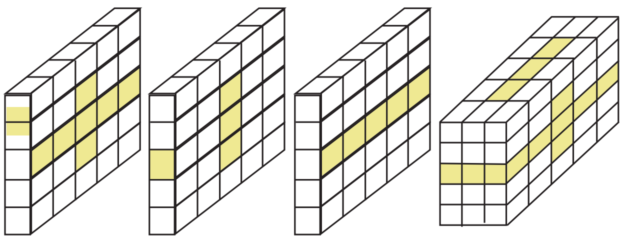


Figura 17

Fuente: elaboración propia

Sección educación científica

Situación de la construcción de una bandera nueva.

Un equipo de fútbol ha encargado su bandera bicolor a un prestigioso diseñador. Éste realizó el boceto a partir de un rectángulo en que dividió cada lado en tres segmentos de la misma longitud; uniendo los puntos obtenidos como se indica en la figura 18, ¿en qué proporción se encuentran los colores que tiene que utilizar para la confección de la bandera?

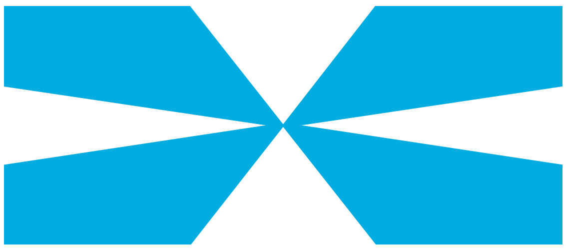


Figura 18

Fuente: tomado de http://www.smpm.es/index.php?option=com_content&view=article&id=38:xvi-edicion&catid=32:xvi-edicion&Itemid=13

Una solución se verificó modelando con cabrí, así:

Figura 19

Fuente: elaboración propia

Construcción social del conocimiento matemático

A continuación se presentan algunas soluciones en cadena, dada a la situación de la bandera, observándose que a partir de la socialización de la solución dada por Helen en el curso corto de ECME14, se generaron otras soluciones creativas. También se comparte una solución sorprendente suministrada por una profesora de química al proponerse resolver en una conferencia de la institución Madre Amalia de Sincelejo, dos semanas después de realizado el curso. De esta manera se pone de relieve la construcción de una red conceptual realizada sobre el pensamiento métrico.

Solución dada por helen a la situación de la bandera[7]

Helen consideró la bandera como un rectángulo de base 12 cm y altura 9 cm, resolviendo la situación de la manera siguiente: calcula el área blanca, para lo cual traslada el triángulo 2, contiguo al triángulo 1 y el triángulo 3 contiguo al triángulo 4, formando dos paralelogramos tal como se muestran en la figura siguiente:

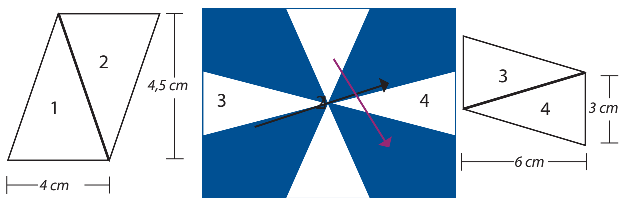


Figura 20

Fuente: elaboración propia

$$A_{Blanca}=18\ cm^2+18\ cm^2=36\ cm^2$$
$$A_{Azul}=A_{Rectángulo}-A_{Blan}$$
$$A_{Azul}=108\ m^2-36\ m^2=72\ \text{, por tanto}$$
$$A_{Azul}=2\cdot A_{Blanca}$$

Solución dada por estudiantes de primer semestre del lima a la situación de la bandera

La solución dada por Helen se socializó a los estudiantes de I semestre de LIMA de la Universidad de Sucre una semana después de ECME 14 en la asignatura *Matemática Escolar*, donde también se observó, en forma general, que es el área del paralelogramo formado con los triángulos 1 y 2, y es el área del paralelogramo formado con los triángulos 3 y 4, a saber:

7 Ingeniera participante del curso, proveniente de Cúcuta, Colombia

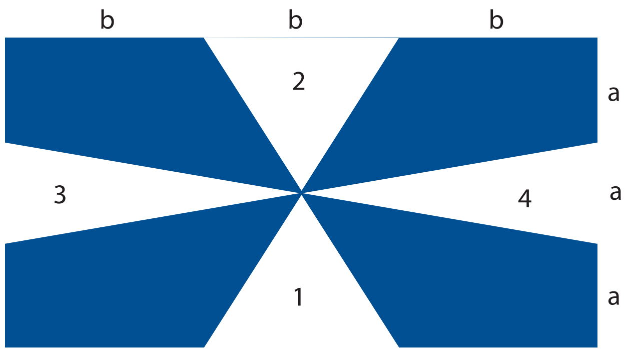
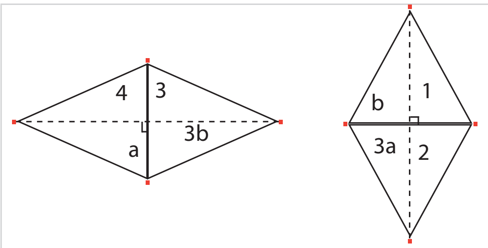


Figura 21

Fuente: elaboración propia

$$A_{Blanca} = A_1 + A_2\ 3/2 \cdot ab + 3/2 \cdot ab = 3ab$$
$$A_{Total} = 3b \cdot 3a = 9ab$$
$$A_{Azul} = {}_{Total\ -}\ A_{Blanca}$$
$$A_{Azul} = 2 \cdot A_{Blanca}$$

Finalizada la demostración, los estudiantes proponen otra solución, uniendo los triángulos por las bases y obteniendo dos rombos, A_1 es el área del rombo formado con los triángulos 1 y 2 , y A2 es el área del rombo formado con los triángulos 3 y 4, a saber:



$$A_{Blanca} = A_1 + A_2 = 3ab$$
$$AAzul_{\square} = A_{Total} - A_{Azul} = 2 \cdot A_{Blanca}$$
$$A_{Total} = 3b \cdot 3a = 9ab$$
$$A_{Azul} = 9ab - 3ab = 6ab$$
$$A_{Azul} = 2 \cdot A_{Blanca}$$

Figura 22

Fuente: elaboración propia

Otro estudiante plantea su solución, reduciendo el problema a encontrar una cuarta parte de la bandera, y lo resuelve de la siguiente forma:

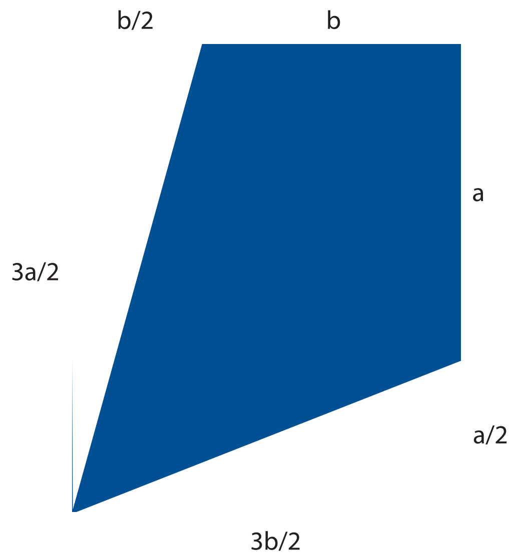


Figura 23

Fuente: elaboración propia

$$A_{Blanca} = A_{\Delta 1} + A_{\Delta 2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot b}{2} + \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot a}{2}$$

$$A_{Blanca} = \frac{3}{8}ab + \frac{3}{8}ab = \frac{3}{4}ab$$

$$A_{Azul} = \frac{9}{4}ab - \frac{3}{4}ab = \frac{6}{4}ab$$

De donde se obtiene : $A_{Azul} = 2 \cdot A_{Blanca}$

Solución dada por la profesora de química a la situación de la bandera

La profesora de química plantea su solución, manifestando que existe una relación dos a uno, por cuanto hay dos segmentos azules por uno blanco; bosquejando el problema así: ¿la proporcionalidad de los segmentos implica la de las áreas? Hecho que fue demostrado por un profesor del departamento de matemáticas de la Universidad de Sucre, Colombia de la manera siguiente: forma un triángulo con el trazo de dos segmentos desde el centro del rectángulo a los dos puntos extremos de la base del rectángulo, obteniéndose en definitiva tres triángulos de áreas congruentes que corrobora la relación de dos áreas azules por una blanca. De esta solución el profesor Jairo Escorcia Mercado presenta una solución que muestra una comprensión más sencilla de la relación de los colores de la bandera y de un uso claro del pensamiento métrico, por cuanto la bandera está formada por doce triángulos de áreas congruentes de los cuales el área azul tiene, al completar los trazos, ocho triángulos y la blanca tiene cuatro, apreciándose directamente que el área azul es el doble de la blanca.

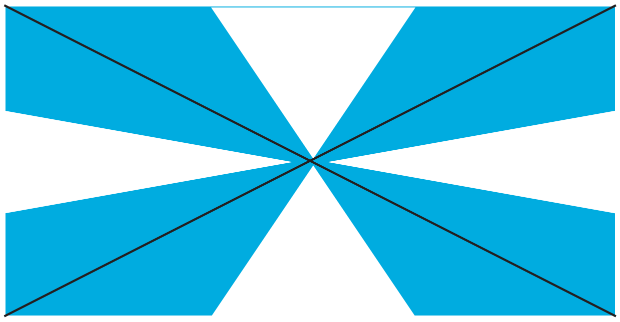


Figura 24

Fuente: elaboración propia

Explotación de la situación de la bandera

Se hacen los siguientes planteamientos:

1. Si cambian las longitudes de los segmentos a y b, ¿cambia o se mantiene la relación $A_{Azul} = 2 \cdot A_{Blanca}$?

2. Si en vez de dividir las longitudes de los lados de la bandera en tres segmentos, se dividen en 4, 5, 6, n segmentos respectivamente, ¿cuál es la relación en cada caso?, ¿cuántos colores necesitaría la bandera ahora? Por ejemplo, para la división de los lados de la bandera en 5 segmentos, se tendría que resolver la situación que se presenta en la figura 25.

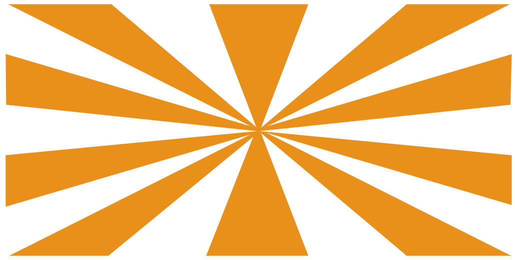


Figura 25

Fuente: elaboración propia

Conclusiones

Para el grupo PEMA compartir las bondades de esta experiencia con la comunidad académica tiene un significado trascendental por cuanto hubo variedad de logros didácticos del abordaje y solución de las situaciones problema en correspondencia con los indicadores de los estándares para el pensamiento métrico. Además, aunque las confusiones conceptuales y algunas dificultades fueron abordadas de manera satisfactoria en la intervención, aún persisten algunas que deben superarse. Los estudiantes presentaron, entre otras, confusión en los conceptos de magnitudes, perímetro con áreas, lado con altura, lado con una diagonal, lado con el perímetro del triángulo, existe confusión de las fórmulas del área del paralelogramo con la del triángulo y con la de perímetro; también en la conversión de las unidades de los sistemas de medidas.

Con esta dinámica de trabajo se muestra, en la práctica, que es posible potenciar en el aula los procesos para desarrollar el pensamiento matemático a través de la resolución de problemas relacionadas con el pensamiento métrico, donde intervienen diferentes actores, escenarios y momentos, apuntando a la construcción social del conocimiento. Esto evidencia que es posible cambiar el paradigma tradicional de enseñanza de la matemática, lo cual es el impacto que se espera lograr con la puesta en consideración ante la comunidad académica de educadores matemáticos de este artículo.

REVISTA CIENTÍFICA / ISSN 0124 2253/ SEPTIEMBRE - DICIEMBRE DE 2014 / No. 20 / BOGOTÁ, D.C.

Referencias

escorcia, J., Chaucanes, E. Therán, E. y Medrano, A.. (2013). "Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento matemático a partir de situaciones del entorno métrico en estudiantes de educación básica y media del municipio de Sincelejo. Ciencia, Ingeniería y educación científica". *Revista Científica*, (octubre), edición especial. Bogotá, D.C.

Freudenthal, H. (1991). *Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. Educational Studies in Mathematics,* (s.d.)

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES). (2007). *Fundamentación conceptual área de matemáticas.* Bogotá: Grupo de evaluación de la educación superior.

Vasco, C., et al. (2006). *Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Vitoria – Gastelz, (2012). *XXIII Olimpiada Matemática Nacional para estudiantes de 2° ESO. Junio. Disponible en:* http://www.fisem.org/web/union/images/stories/32/revista32.pdf

Descriptores específicos de los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos[1]

Specific descriptors Van Hiele levels in learning the similarity of polygons

Níveis de descritores específicos Van Hiele em aprender a semelhança de polígonos

Fecha de recepción: febrero de 2014

Fecha de aceptación: julio de 2014

Élgar Gualdrón Pinto[2]

Resumen

En este artículo se presentan los resultados preliminares de una investigación que estudia las formas y la evolución del razonamiento que tienen los estudiantes al abordar tareas relacionadas con la semejanza. En una primera etapa se elabora una caracterización a priori de los descriptores de nivel de Van Hiele basados en estudios previos de Gualdrón y Gutiérrez (2007), los cuales se confirman y amplían mediante una intervención, usando una unidad de enseñanza diseñada siguiendo las líneas de Lemonidis (1991) y el modelo de razonamiento de Van Hiele siguiendo las líneas de Gutiérrez y Jaime (1998). La muestra del estudio es un grupo de estudiantes de noveno grado (14-15 años) de un colegio de Pamplona, Norte de Santander (Colombia). Los análisis preliminares del conjunto de datos muestran interesantes formas de resolución de ciertas tareas en las cuales los participantes utilizan un lenguaje rico y muestran variadas formas de razonamiento.

Palabras clave: niveles de Van Hiele, matemáticas escolares, geometría, semejanza, homotecia, Teorema de Thales.

Abstract

Preliminary results of an investigation in which are being studied, among other things, the forms and the evolution of reasoning that students have to deal with tasks related to the similarity presented in this work. In a first moment we developed a-priori characterization descriptors Van Hiele level based on previous studies Gualdrón & Gutierrez (2007), which confirmed and extended by an intervention using a teaching unit designed along the lines of Lemonidis (1991) and the model of Van Hiele thinking along the lines of Gutierrez & Jaime (1998). The study sample is a group of ninth graders (14-15 years old) from a college of Pamplona, Norte de Santander (Colombia). Preliminary analyzes

1 Artículo de investigación.

2 Universidad de Pamplona, Pamplona (Colombia). Contacto: egualdron@unipamplona.edu.co

show interesting ways of solving certain tasks in which participants use a rich language and show various forms of reasoning.

Keywords: Van Hiele levels, School mathematics, Geometry, Similarity, Dilation, Thales theorem.

Resumo

Os resultados preliminares de uma pesquisa em que estão sendo estudados, entre outras coisas, as formas e a evolução do raciocínio que os alunos têm de lidar com tarefas relacionadas com a similaridade. Em primeira instância foi desenvolvida uma caracterização a-priori dos descritores do nível de Van Hiele baseados em estudos prévios Gualdrón e Gutierrez (2007), que foram confirmados e estendidos através de uma intervenção usando uma unidade de ensino seguindo o modelo de Lemonidis (1991) e o modelo de Van Hiele entre os linhamentos de Gutierrez e Jaime (1998). A amostra do estudo é um grupo de alunos do nono ano (14-15 anos) de uma escola de Pamplona, Norte de Santander (Colômbia). Análises preliminares dos dados demostraram formas interessantes de resolver determinadas tarefas em que os participantes usaram uma linguagem rica e mostraram diversas formas de raciocínio.

Palavras-chave: Níveis de Van Hiele, Matemática escolar, Geometria, Similaridade, Homotetia, Teorema de Thales.

Introducción

El proceso de enseñanza-aprendizaje de temas geométricos demanda más investigación dirigida a conocer las formas que tienen los estudiantes de adquirir de manera adecuada y significativa los conocimientos geométricos, particularmente el de semejanza de polígonos (Gualdrón, 2006).

A pesar de que la semejanza es una noción fundamental para muchos argumentos matemáticos y aplicaciones en matemáticas, que debería ser estudiada en detalle (Hansen, 1998; NCTM, 2000), son pocos los estudios que se pueden encontrar. La mayoría de hallazgos sobre el concepto de semejanza están incluidos en estudios sobre razonamiento proporcional, el cual ha sido estudiado extensamente (Hart, 1984; Hart y otros, 1981, 1989; Lamon, 1993; Fernández, 2001; Margarit, Gómez y Figueras, 2001). Se encuentran algunos trabajos que utilizan la semejanza como contexto para estudiar la relación entre el conocimiento profesional del educador de matemáticas de secundaria y su práctica (Escudero y Sánchez, 1999), o se encuentran trabajos que estudian la comprensión de los profesores de primaria en formación del concepto de semejanza (Swoboda y Tocki, 2002; Gerretson, 2004).

Teniendo en cuenta lo expuesto y con la pretensión de que los estudiantes, a partir de situaciones matemáticas concretas, desarrollen su proceso de razonamiento, adquieran y comprendan conceptos y relaciones matemáticas que favorezcan el aprendizaje de la semejanza; además, pretendemos que las situaciones planteadas favorezcan el tránsito de los estudiantes de un nivel de razonamiento a otro superior. Ante este panorama hemos formulado la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las características que describen los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza?

Marco conceptual

Para realizar el diseño y posterior análisis de las actuaciones de los estudiantes, después de realizar una intervención usando la unidad de enseñanza de la semejanza, se tuvieron en cuenta los estudios de Lemonidis (1991) y el modelo de razonamiento de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998; Gualdrón y Gutiérrez, 2007).

La semejanza como objeto de enseñanza

Desde el punto de vista de la enseñanza de la semejanza se analizaron los estudios de Lemonidis (1991) y una ampliación al esquema presentado por este autor (Gualdrón, 2008). El esquema caracteriza tres aproximaciones que se consideran importantes al abordar la semejanza como objeto de enseñanza:

a. Relación intrafigural: donde se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra. Dentro de esta aproximación distinguen las siguientes situaciones:
   - Cuando las figuras forman parte de una configuración de Thales, en la que se consideran los aspectos de proyección y homotecia, con sus correspondientes razones.
   - Cuando las figuras no se consideran formando una configuración de Thales, en la que se considera a las figuras separadas y en disposición homotética.

b. Transformación geométrica vista como útil: La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como útil en la resolución de problemas —escalas, cálculo de longitudes desconocidas y cálculo de longitudes inaccesibles—.

c. Transformación geométrica vista como objeto matemático: Se caracteriza porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

En este sentido, Vasco (1998) plantea que "El currículo colombiano [en geometría] no se apoya en la geometría transformacional". Además, plantea que el enfoque de enseñanza de la semejanza por transformaciones se dirige más a la matemática vista como ciencia y no está guiada por los aspectos psicológicos del aprendizaje de las matemáticas. En consecuencia, y dadas las edades de los estudiantes en las que se desarrollará el estudio (14-15 años), se decide contemplar únicamente la relación intrafigural y la transformación geométrica vista como útil. El siguiente esquema muestra un resumen de la forma como la semejanza puede ser abordada cuando se la trata como objeto de enseñanza.

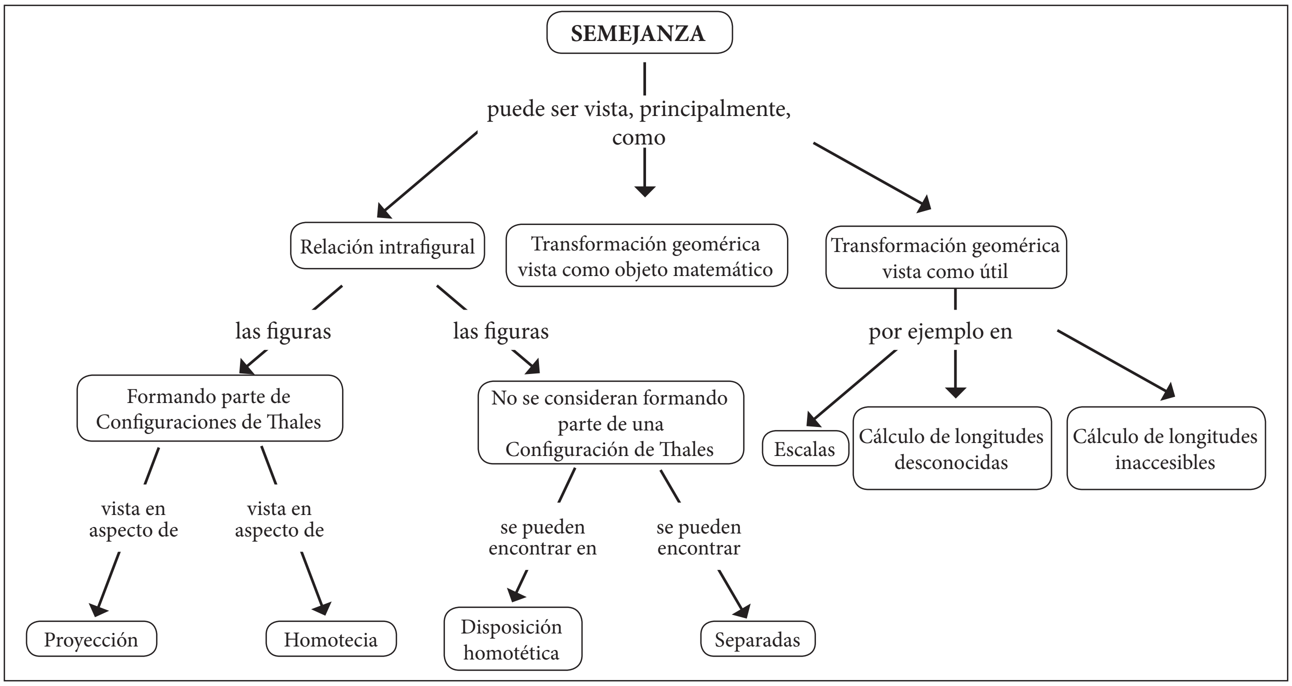


Figura 1. La semejanza como objeto de enseñanza

Fuente: elaboración propia

El modelo de razonamiento de Van Hiele

El modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1957; Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez y Jaime, 1996) es un excelente referente teórico para la organización y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Un buen ejemplo de ello es NCTM (2000). Este modelo, desde su aparición, ha sido ampliamente estudiado, no solamente en su aplicación (Jaime, 1993; Guillén 1997; Ding y Jones, 2006) sino también en su ampliación y mejoramiento (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Gutiérrez y Jaime, 1998). No obstante, la semejanza es un tema de geometría en el que la investigación sobre la aplicación del modelo de Van Hiele es muy limitada (Gualdrón, 2006). En esta investigación se han utilizado los descriptores de nivel que resultaron de tener en cuenta estudios previos de Gualdrón (2006) y una ampliación de estos. El modelo intenta explicar cómo progresan los estudiantes en su habilidad de razonamiento geométrico e incluye dos aspectos importantes:

Primer aspecto, el *Descriptivo*, en cuanto que intenta explicar cómo razonan los estudiantes. Esto se hace a través de la definición de cuatro "niveles de razonamiento" (por ejemplo, Jaime y Gutiérrez, 1990, Burger y Shaughnessy, 1986).

- Primer nivel: la consideración de los conceptos es global. No se tienen en cuenta elementos ni propiedades.
- Segundo nivel: la característica fundamental es que los conceptos se entienden y manejan a través de sus elementos.
- Tercer nivel: la característica básica de este nivel consiste en el establecimiento de relaciones entre propiedades.
- Cuarto nivel: está caracterizado por la comprensión y el empleo del razonamiento formal, aspiración de todo profesor para sus estudiantes de enseñanza secundaria.

Segundo aspecto, el *Prescriptivo*, porque da unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza para lograr que los estudiantes progresen en su forma de razonar. Esto se lleva a cabo mediante la consideración de cinco “fases de aprendizaje” (por ejemplo, Jaime y Gutiérrez, 1990, Burger y Shaughnessy, 1986).

- Fase primera (Información): su finalidad es la obtención de información recíproca profesor alumno.
- Fase segunda (Orientación dirigida): el profesor dirige a los alumnos para que éstos vayan descubriendo, lo cual constituye la esencia de ese nivel.
- Fase tercera (Explicitación): su objetivo es que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas anteriormente y consoliden el vocabulario propio del nivel.
- Fase cuarta (Orientación libre): dirigida a consolidar los aspectos básicos del nivel.
- Fase quinta (Integración): tiene como objetivo establecer y completar la red de relaciones objeto de ese nivel para el concepto que se trabaja.

Unidad de enseñanza de la semejanza

La unidad de enseñanza se diseñó con el objetivo de fortalecer la adquisición de los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele, y caracterizar los niveles de razonamiento en el tema de polígonos a partir de la intervención.

En el diseño de las actividades[3] se tuvo en cuenta dos aspectos: primero, el tipo de papel sobre el cual se presentaron cada una de las 43 actividades, y segundo, el tipo de figura sobre la que los estudiantes debían trabajar. De esta forma, las tareas fueron escogidas/diseñadas para que los estudiantes trabajaran sobre hojas de papel blanco o cuadriculado y manipularan diversas superficies poligonales,[4] tanto cóncavas como convexas. Las tareas contenían problemas de cálculo, problemas de identificación de relaciones, problemas de construcción, y problemas de demostración. Cada actividad fue diseñada para ser presentada en hojas individuales, y sobre las cuales los estudiantes debían justificar cada uno de los procesos que los conducía a la respuesta —numérica, gráfica o verbal—. Para el desarrollo de cada una de las actividades, los estudiantes podían utilizar reglas, escuadras, cinta métrica, compás, transportador de medidas angulares, tijeras y calculadora. La unidad tenía como característica esencial la enseñanza basada en el descubrimiento guiado basado en las orientaciones del profesor que guía al estudiante sin influir directamente en los razonamientos de los mismos.

Metodología

La investigación propuesta, de tipo cualitativo, se llevó a cabo con 27 estudiantes de noveno grado (14–15 años), del colegio del Rosario de Pamplona. La implementación de la unidad de enseñanza se realizó durante el horario normal de clases en el aula habitual —aula de matemáticas del grado noveno—; en el desarrollo de cada actividad, primero se trabajó de manera individual y después en grupos de tres estudiantes. La recolección de la información se hizo a través de video grabación —en el momento del trabajo individual y en el grupal— y de las producciones de los estudiantes —las hojas que debían entregar al finalizar cada actividad—. El investigador, cuando lo consideraba necesario, realizó algunas entrevistas después de clase a algunos estudiantes con el fin de pedir una ampliación —aclaración/justificación— a respuestas dadas en las hojas de trabajo. A partir del análisis de las producciones de los estudiantes y los

3 Entendemos actividad como compuesta por una o varias tareas.

4 En la selección de los polígonos se tuvo en cuenta lo planteado por Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992) en relación con evitar presentar polígonos únicamente en posición estándar.

registros fílmicos, se obtuvieron datos cualitativos que permitieron construir la caracterización de los descriptores de los niveles de razonamiento. El profesor titular del curso orientó el desarrollo de las diferentes actividades y el investigador participó como observador participativo.

Análisis y discusión

A continuación se presentan algunos de los aspectos relevantes del análisis de los datos recogidos. Se muestran algunos ejemplos representativos de formas de razonamiento y se harán algunos comentarios sobre ellos.

En la actividad número 24, como se muestra a continuación, se pedía la justificación de la semejanza de los triángulos formados en las partes 1 y 2; *Carlos* utiliza la homotecia para justificar la semejanza. Es decir, justifica primero por qué se presenta la homotecia y luego la utiliza para justificar la semejanza.

24(1) Los segmentos AP y DP pertenecen a rectas secantes que se cruzan en el punto P y, a su vez, cortan a la circunferencia, como aparece en la figura. Justifique por qué los triángulos APC y DPB son semejantes.

24(1) Los segmentos AP y DP pertenecen a rectas secantes que se cruzan en el punto P y, a su vez, cortan a la circunferencia, como aparece en la figura. Justifique por qué los triángulos APC y DPB son semejantes.

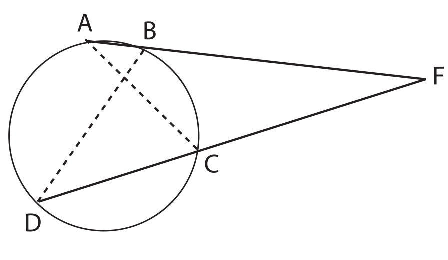


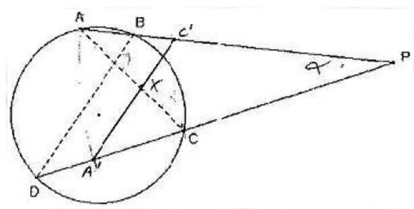
Figura 2. Actividad 24(1)

Fuente: elaboración propia

24(2) Dibuje un triángulo cualquiera y, desde cada vértice, trace una recta paralela al lado opuesto. De esta manera obtiene un triángulo más grande. Justifique por qué este triángulo es semejante al inicial.

Figura 3. Actividad 24(2)

Fuente: elaboración propia

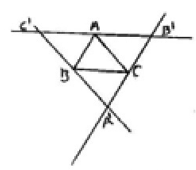


1). transladando la distancia $\overline{PC}$ sobre $\overline{PA}$ y la distancia $\overline{PA}$ sobre $\overline{PD}$ tenemos un triangulo PA'C' semejante al ΔDPB ya que con esto el proceso que se realiza es simplemente voltear la figura. Con esto podriamos establecer una homotecia con centro P, ya que, los vertices correspondientes y P son colineales $\overline{PC'} // \overline{PA}$. $\overline{PA'} // \overline{PD}$, y para probar que $\overline{A'C'} // \overline{BD}$, utiliza que, como $\angle BAC$ y $\angle BDC$ estan inscritos en el mismo arco, tenemos que son congruentes, y como tengo una recta PD, a la cual, dos rectas diferentes la cortan formando el mismo angulo, entonces las dos rectas seran paralelas y como estas rectas son $\overline{BD}$ y $\overline{C'A'}$ tenemos probada la ultima condición necesaria para la homotecia.

Figura 4. Respuesta de Carlos a la actividad 24(1)

Fuente: elaboración propia

2)



Como los lados del triangulo grande son paralelos a los del pequeno (los correspondientes) y sabiendo que si los lados correspondientes son paralelos se pueden alinear para completar una homotecia y confirmar la semejanza, tenemos una demostracion completa de la semejanza

Figura 5. Respuesta de Carlos a la actividad 24(2)

Fuente: elaboración propia

Sección educación científica

En la actividad 21, como se muestra a continuación, *Carlos* utiliza el teorema de Thales para justificar la semejanza de los triángulos dispuestos en la figura y luego utiliza una propiedad matemática que han "descubierto" con su profesor —"Los triángulos en posición de Thales son semejantes"—.

ACTIVIDAD N° 21
Los puntos P, Q y R son los puntos medios de 1% segmentos AC, CB y BA respectivamente. Identifique todas las posibles relaciones de semejanza entre los diferente triángulos que se forman, en la figura. Justifique sus respuestas.

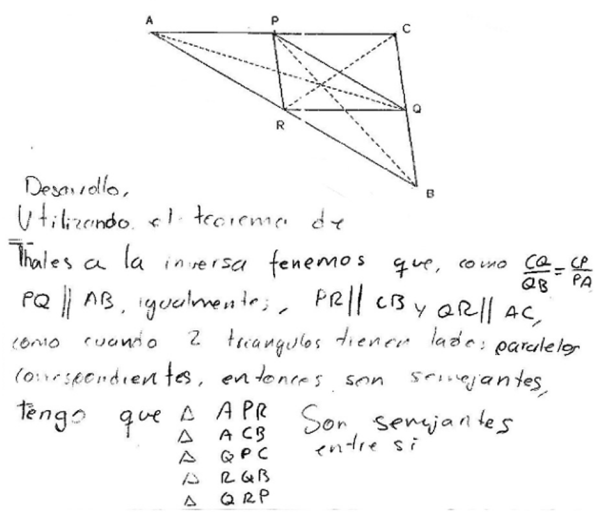


Figura 6. Respuesta de Carlos a la actividad 21

Fuente: elaboración propia

En la actividad 37, como se muestra a continuación, *Francisco* utiliza el teorema de Thales para justificar la semejanza de los triángulos dispuestos en la figura. Luego, utiliza una correspondencia adecuada, entre figuras semejantes, para justificar que los segmentos BC y AC son iguales.

ACTIVIDAD N° 37
Compare los segmentos BC y AC. Justifique su respuesta utilizando argumentos diferentes a los exclusivamente métricos.

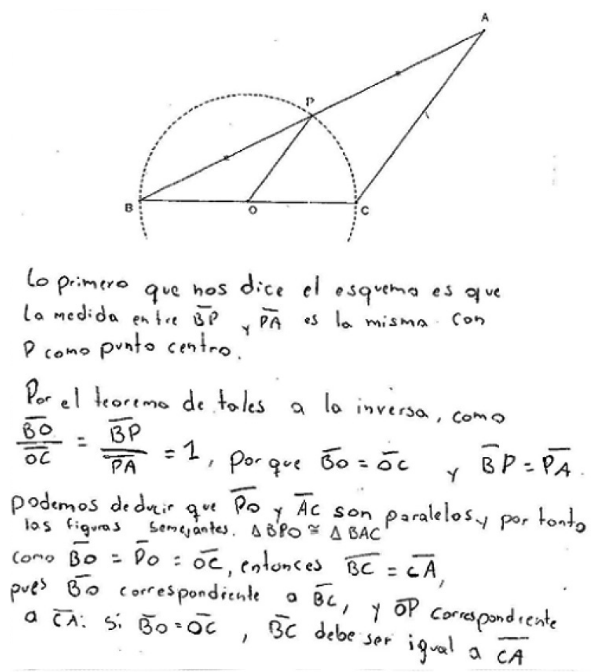


Figura 7. Respuesta de Francisco a la actividad 37

Fuente: elaboración propia

En los ejemplos presentados, el razonamiento exhibido por los estudiantes se ha clasificado como de nivel 3 de Van Hiele, donde logran demostrar, informalmente, algunas propiedades relacionadas con la semejanza de figuras planas.

Para cada nivel de razonamiento se enunciará a continuación aquellos descriptores iniciales que han sido validados por las respuestas de los estudiantes y los descriptores emergentes obtenidos en la experimentación. Los descriptores marcados con un asterisco son los descriptores emergentes.

Nivel 1. Reconocimiento

Los estudiantes perciben la semejanza de figuras de manera global, por lo que:

1.1. Reconocen figuras semejantes basándose en la apariencia de ellas, es decir, utilizando únicamente estrategias de tipo visual. Pueden presentarse casos en que no reconozcan la semejanza entre dos figuras porque alguna esté girada.
1.2. Ven las figuras como un todo y describen las diferencias y similitudes entre ellas usando

términos como "más grandes", "más pequeños", "estirados", "ampliados". Por ejemplo, cuando un estudiante esté decidiendo sobre la semejanza de dos rectángulos, podría decir "este rectángulo no es tan largo como éste". También pueden incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.

1.3. Empiezan a percibir algunas características matemáticas de la semejanza, pero aún lo hacen de manera aislada. Por ejemplo, algunos pueden tomar medidas de los ángulos y darse cuenta que en las figuras semejantes éstas son iguales, sólo que no lo ven como una condición necesaria para la semejanza.
1.4. Pueden identificar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza entre figuras cuando pertenecen a una configuración de Thales —aspecto de proyección o aspecto de homotecia— o están en disposición homotética.
1.5. Pueden identificar y explicar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza de figuras en mosaicos.

Nivel 2. Análisis

La consideración de la semejanza de figuras a través de sus elementos y propiedades permite a los estudiantes:

2.1. Construir o dibujar figuras semejantes a una figura dada teniendo en cuenta explícitamente aspectos matemáticos como la medida de los ángulos o las longitudes de los lados.
2.2. Determinar aspectos matemáticos específicos de las figuras semejantes, como la proporcionalidad de longitudes de los segmentos y la igualdad de las medidas de los ángulos, así que pueden inducir las condiciones necesarias para que las figuras sean semejantes.
2.3. Descubrir que la posición de las figuras semejantes es irrelevante, es decir, que no es necesario que las figuras semejantes tengan la misma posición.
2.4. Entender que la congruencia de figuras planas es un caso particular de la semejanza de figuras planas.
2.5. Inducir algunas propiedades relacionadas con la semejanza en triángulos rectángulos.
2.6. Comprender que la figura resultante, al aplicar una homotecia, es semejante a la figura dada.
2.7. Relacionar la semejanza de triángulos con el teorema de Thales, comprendiendo que los triángulos en posición de Thales son semejantes.
2.8. Utilizar configuraciones de triángulos en posición de Thales o en disposición homotética —con centro de homotecia en un vértice— para demostrar relaciones de semejanza entre ellos.
2.9. Realizar construcciones o dibujos de figuras semejantes al darles el factor de semejanza y además predecir si la figura resultante será una ampliación, una reducción o una figura idéntica a la dada. También pueden realizar construcciones o dibujos de figuras semejantes usando homotecias y teorema de Thales.
2.10. Relacionar la razón de semejanza con las escalas. Es decir, comprender que la escala es la razón de semejanza entre una reproducción —foto, mapa, plano, entre otros— y la realidad que representa dicha reproducción.
2.11. Identificar relaciones de semejanza en figuras planas complejas —dos o más figuras planas entrecruzadas—.
2.12. Demostrar propiedades relacionadas con la semejanza de figuras verificando que se cumplen en algunos casos.
2.13. Utilizar la definición de semejanza para la solución de situaciones matemáticas, por ejemplo determinar longitudes accesibles o inaccesibles.
2.14. Identificar la semejanza de figuras relacionándolas con la transformación, ampliación y reducción de una figura respecto de otra.

2.15. Comprender que los rectángulos coincidentes en un vértice y que comparten una diagonal son semejantes.

Nivel 3. Abstracción

Al establecer relaciones entre las propiedades y comprender planteamientos generales, los estudiantes consiguen:

3.1. Determinar empíricamente y justificar de manera deductiva informal las condiciones suficientes para la semejanza de rectángulos y triángulos —incluyendo criterios AA, LLL, LAL—.
3.2. Distinguir entre condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras. Por ejemplo, ellos reconocen que, en los triángulos, es suficiente que dos ángulos correspondientes sean iguales para que sean semejantes, mientras que en los demás polígonos no es suficiente dicha condición, pero sí es necesaria.
3.3. Demostrar informalmente algunas propiedades relacionadas con la semejanza de figuras planas.
3.4. Demostrar informalmente situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza.
3.5. Plantear más de una demostración informal de propiedades o situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza.

Conclusiones

Se han analizado las argumentaciones que los estudiantes propusieron para justificar la semejanza y se ha encontrado que los estudiantes poseen más y mejores herramientas de razonamiento si se hace una comparación con los resultados de estudios previos (Gualdrón, 2006), en donde no se estableció ningún vínculo entre la semejanza y el teorema de Thales y la homotecia. Estos hallazgos sugieren que en la enseñanza del tema se debería establecer un vínculo directo entre la semejanza y la homotecia y el teorema de Thales.

Se ha logrado que la mayoría de los estudiantes alcancen razonamientos hasta de tercer nivel de Van Hiele en la semejanza, lo cual es altamente positivo dado que generalmente, a nivel escolar, estos alcanzan segundo nivel de razonamiento de Van Hiele (Gualdrón, 2006).

Los resultados de este estudio aportan a la literatura sobre formas efectivas de mejoramiento del razonamiento, específicamente, en tareas relacionadas con la semejanza. El análisis cualitativo de los datos permitió confirmar y afinar el listado a priori de descriptores de nivel planteados y, en otros casos, permitió obtener descriptores emergentes.

Referencias

Burger, W. F., and Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17(1)*, 31-48.

Ding, L. and Jones, K. (2006). Students´ geometrical thinking development at grade 8 in Shangai. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká and N. Stehlíková (Eds.), *Proceeding of the 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 382.

Escudero, I. and Sánchez, V. (1999). The relationship between professional knowledge and teaching practice: The case of similarity. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME Conference, 2*, 305-312.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral. España: Universidad de Valencia.

Gerretson, H. (2004). Pre-service elementary teachers´ understanding of geometric similarity: The effect of dynamic geometry software. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26 (3)*, 12-23.

Gualdrón, E. (2006). *Los procesos de aprendizaje de la semejanza por estudiantes de 9º grado.* Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. España: Universidad de Valencia.

Gualdrón, E. y Gutiérrez, Á. (2007). Una aproximación a los descriptores de nivel de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. En M. Camacho, P. Flórez y P. Bolea (Eds.). *Memorias del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 11(1)*, 369-380.

Gualdrón, E. (2008). Improving the ways of reasoning in similarity in 14 and 15 years old students. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano and A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of de PME 20th and PME-NA 32nd Conference, 1*, 266.

Guillén, G. (1997). *El Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Tesis doctoral. España: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Comares.

Gutiérrez, A., and Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20, 2 y 3*, 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A. and Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22 (3)*, 237-251.

Hansen, V. L. (1998). Everlasting geometry. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Hart, K. M. *et al*. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: John Murray Ltd.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics projects.* London: NFER-Nelson.

Hart, K. M. *et al.* (1989). *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching.* Windsor, G.B.: NFER-Nelson.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral. España: Universidad de Valencia.

Jaime, A., Chapa, F. y Gutiérrez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, *23*, 49-62.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática.* Sevilla: Alfar.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for research in mathematics education, 24*, 41-61.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques 11(23)*, 295-324.

Margarit, J., Gómez, B. and Figueras, O. (2001). Ratio comparison: Performance on ratio in similarity task. *Proceedings of the 25th PME Conference*, *1*, 340.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Swoboda, E. and J. Tocki (2002). How to prepare prospective teachers to teach mathematics: Some remarks. *Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), 2*, 1-10.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. ERIC: Columbus, USA.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Utrecht, Holanda (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991). Holanda: Universidad de Utrecht.

Vasco, C. E. (1998). Dynamic geometry in the colombian school curriculum. *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. An ICMI study. C. Mammana and V. Villani. Dordrecht, Holanda, Kluwer Academic Publishers.

La argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas[1]

The argumentation like strategy of education and of learning of the mathematics

A argumentação como estratégia de educação e de aprendizagem da matemática

Fecha de recepción: noviembre de 2013

Fecha de aceptación: julio de 2014

Eliécer Aldana Bermúdez[2]

Resumen

El presente artículo hace referencia a la importancia de la argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, es decir, cómo la argumentación puesta al servicio de la enseñanza puede generar un mayor aprendizaje de los estudiantes en la clase. Para ello se ha puesto de manifiesto un enfoque teórico de comprensión matemática, y una metodología de tipo cualitativo con un estudiante universitario, a quien se le plantearon algunas tareas con el propósito de analizar los argumentos que utiliza y la relación que establece entre ellos. A partir ejemplos, se muestra la comprensión que hace el estudiante de algunos conceptos matemáticos de acuerdo con los argumentos que utiliza en la resolución de las tareas matemáticas planteadas.

Palabras clave: argumentación, enseñanza, aprendizaje, comprensión, trabajo colaborativo.

Abstract

The text that here one presents refers to the importance of the argumentation as strategy of education and of learning of the mathematics, that is to say, how the argumentation put to the service of the education can generate a major learning of the students in the class. For it there has been revealed a theoretical approach of mathematical comprehension, and a methodology of qualitative type with a university student, to whom some tasks appeared him, with the intention of analyzing the arguments that it uses and the relation that it establishes between them. To dividing examples, there appears the comprehension that there does the student of some mathematical concepts of agreement with the arguments that it uses in the resolution of the mathematical raised tasks.

1 Artículo de investigación.

2 Universidad del Quindío, Armenia (Colombia). Contacto: eliecerab@uniquindio.edu.co

Keywords: Argumentation, education, learning, comprehension, collaborative work.

Resumo

O texto aqui apresentado refere-se à importância do argumento como uma estratégia para o ensino e aprendizagem da matemática, ou seja, como o raciocínio a serviço da educação pode gerar maior aprendizagem dos alunos em sala de aula. Este revelou uma abordagem teórica para o entendimento matemático e uma metodologia qualitativa com um estudante universitário, a quem eles levantaram algumas tarefas, a fim de analisar os argumentos utilizados ea relação estabelecida entre eles. Como exemplos, estudante compreensão fazendo alguns conceitos matemáticos de acordo com os argumentos usados na resolução de tarefas matemáticas das questões apresentadas.

Palavras-chave: argumentação, a educação, a aprendizagem, a compreensão, o trabalho colaborativo.

Presentación del problema

La experiencia vivida por el autor del presente artículo, como estudiante y profesor investigador ha permitido registrar cómo los jóvenes, en su gran mayoría, no presentan una competencia comunicativa para argumentar sus posturas académicas, son poco expresivos en la forma como justifican la resolución de las tareas matemáticas, se quedan en los procesos, en las respuestas, muestran unas concepciones poco firmes, en algunos casos lo hace producto de la memoria, sin saber el porqué proceden de una forma determinada y no están acostumbrados a realizar tareas diferentes a las habituales en el aula de clase.

La argumentación cumple un rol fundamental en el proceso de enseñanza y guía la acción educativa, porque genera un proceso de comunicación entre pares, entre el educador y el educando, propicia el diálogo y permite un trabajo colaborativo en el aula de clase que facilita la tarea del profesor en cuanto a la mediación e interacción en el proceso docente educativo. No obstante, durante el proceso de la clase en matemáticas, dadas las características del área, los saberes se adquieren generalmente bajo un paradigma de tipo reproduccionista, donde poco se privilegia la interacción en la clase en forma de un proceso heurístico que ponga en acción, en diálogo, las tres dimensiones del triángulo didáctico, el educando, el educador y el saber.

Diagnosticar los saberes previos del educando facilita el punto de partida del educador a la hora de generar procesos de enseñanza aprendizaje, pues esto le permite establecer un contrato didáctico que, en términos de Chevallard (1982), hace referencia a los compromisos y los resultados que espera el profesor del alumno y viceversa. Deben existir reglas o acuerdos que se apliquen en la situación didáctica, en este sentido la argumentación es un estilo de enseñanza práctica que garantiza el pensamiento racional, consciente y duradero del estudiante, porque todo lo que construye lo hace desde la acción, el proceso, hasta llegar a la construcción misma del objeto matemático en abstracto, lo que implica mejorar las condiciones académicas de los estudiantes y ayuda a disminuir la deserción escolar.

Se trata de responder a la pregunta ¿cómo la argumentación contribuye para que los conceptos matemáticos sean comprendidos y utilizados? Desde este punto de vista, la argumentación al servicio del aprendizaje y de la enseñanza debe avivar el desarrollo de las competencias disciplinares, comunicativas, actitudinales, argumentativas, procedimentales y conceptuales propias del rigor de las ciencias matemáticas, en el sentido que se busca el paso de un pensamiento matemático elemental a un pensamiento de naturaleza avanzado.

Marco conceptual

En este apartado se hace referencia, en primer lugar, al desarrollo de competencias como lo plantea Maldonado (2012), en el cual pone de manifiesto el esfuerzo por optimizar el desarrollo de competencias conceptuales como las relacionadas con aspectos teóricos propios del saber matemático con los conceptos fundantes de esta disciplina en particular. Asi mismo, las competencias modelativas como proceso que permite al sujeto modelar situaciones problema de su realidad o entorno inmediato a partir de la resolución de un problema en contexto. Las operativas como aquellas que se relacionan con la comparación y ejercitación de procedimientos o manejo de algoritmos. Las competencias explicativas demuestran la capacidad que tienen los sujetos para argumentar, confrontar y justificar los procesos relacionados con una actividad que implica el desarrollo lógico del pensamiento matemático. Las competencias comunicativas se refieren a la capacidad del estudiante para expresar y encadenar juicios de razonamientos y deducciones durante el aprendizaje colaborativo; en este sentido, el desarrollo de competencias debe generar la creación de redes sociales de aprendizaje matemático, y de esta manera contribuir a mejorar las condiciones académicas de los estudiantes y por ende a motivarlos en el aprendizaje y con ello contrarrestar la deserción escolar universitaria asociada al bajo rendimiento académico.

La argumentación es un proceso que hace referencia al porqué de lo que hace el estudiante mediante la exposición de razonamientos para justificar un procedimiento matemático, para ello parte de la identificación de una situación, para llegar a juicios de razonamientos y análisis desde el saber matemático. El proceso argumentativo lo realiza el estudiante desde dos habilidades propias del lenguaje: la oralidad y la escritura, en este sentido los argumentos que utiliza un aprendiz durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático se evidencia por la capacidad que tenga para mostrar un conjunto de proposiciones que establezcan una relación de coherencia entre lo que el sujeto piensa, dice y demuestra durante la resolución de una tarea en particular. Por ejemplo, el paso del lenguaje hablado al escrito, del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, de una representación tabular a la interpretación de una gráfica.

Por su parte, la matemática es un sistema lógico formal, es un proceso constructivo mediante el cual se definen símbolos, reglas de transformación y reglas de inferencia, en este sentido es necesario diferenciar entre demostración y argumentación. La demostración es entendida como un proceso de derivación de conclusiones válidas a partir de expresiones iníciales bien formuladas como un sistema lógico formal que está dado por la asignación de valores de verdad a las proposiciones, con la aceptación de la verdad de las proposiciones iníciales.

Por otro lado, la argumentación tiene origen en la discusión de una tesis enfrentada a tesis alternativas de solución a un problema. Su origen retórico tiene como finalidad convencer a posibles opositores. Para la mayoría de los matemáticos formalistas, la discusión no tiene cabida y tampoco la argumentación. Por ejemplo, si se va a demostrar que la suma de dos números impares es un número par, hay una prueba formal que no admite discusión; aunque no desconocen que para esta prueba se necesita imaginación, que se requiere de conocimientos previos y posibilidades de transformación integrando conocimientos o haciendo descubrimiento de fórmulas no conocidas.

Desde la argumentación no se niega el diálogo como medio de creación, lo cual hace de la demostración un proceso sinérgico; pues en cada paso de la solución del problema habrían alternativas de equivalencia para realizar la transformación sin violar el principio de igualdad. Todo este proceso es un escenario fecundo para el diálogo y la construcción colectiva que podemos llamar "argumentación matemática", Lakatos (1974 citado por Maldonado, 2012). Entonces, desde el punto de vista de la demostración, el centro de atención es la prueba formal de la demostración, y desde la argumentación interesa el conocimiento ontológico de los elementos constitutivos del concepto de número, por ejemplo, par, impar, cardinal, ordinal, seriación, comparación y clasificación entre otros. Podría entonces pensarse que para algunos la argumentación no tiene validez, por los posibles juicios de razonamientos subjetivos que se puedan realizar y que sólo tiene validez la demostración como sucede por ejemplo para algunos investigadores entre lo que es la investigación cualitativa versus investigación cuantitativa, pues no se trata de decir quién tiene la verdad o qué es mejor, simplemente son dos procesos diferentes pero que en esencia se complementan, pues no existe encadenamiento de juicios de razonamiento sin la argumentación.

En el ámbito de la Educación Matemática la argumentación como estrategia de aprendizaje colaborativo en la solución de problemas tiene sentido para construir significado de las estructuras conceptuales y para relacionar estos significados con escenarios donde potencialmente se puede utilizar la estructura matemática para leer la estructura de la matemática escolar. Los procesos argumentativos son importantes en relación con los procesos educativos y de formación, al respecto, desde el enfoque de Toulmin (1954), la argumentación aporta diferentes formas de una definición formal, ejemplos, relaciones de un concepto con otros conceptos, contra-ejemplos y refutaciones.

Desde este punto de vista, los autores coinciden en plantear que la argumentación es una forma de estudio de clase que permite la interacción, el razonamiento, los juicios de valor, es una forma de justificar los procedimientos que realizan los estudiantes para dar cuenta de la forma como comprenden un concepto matemático y para el profesor de conocer y comprender cómo aprende su alumno.

Metodología

Este es un estudio de tipo cualitativo "orientada a la comprensión**,** cuyo objetivo es describir e interpretar la realidad educativa desde dentro" (Dorio, I., Massot, I. y Sabariego, M., 2009, p. 281); tiene que ver con la forma como los estudiantes comprenden un concepto y es reflexiva porque plantea cómo los profesores pueden utilizar la argumentación al servicio de la enseñanza y del aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, lo que se presenta tiene que ver con un estudio de caso en el cual se analizan los argumentos que plantea un estudiante universitario cuando se le presenta una tarea en la cual, más que los procedimientos, se espera que justifique sus razonamientos. Para ello, se han utilizado algunos cuestionarios que ponen en evidencia lo que el estudiante sabe hacer con lo que conoce, una entrevista para complementar la información obtenida a partir del cuestionario mediante la argumentación que hace el estudiante de la forma como ha resuelto la tarea, y un mapa conceptual que muestra la imagen del concepto que tiene el estudiante del concepto de integral definida.

Análisis de datos

para ejemplificar lo que es la argumentación al servicio de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas se tomó como objeto de investigación la comprensión matemática y como objeto matemático de investigación el concepto de integral definida desde algunos de los elementos matemáticos que lo configuran.

Por ejemplo:

Sea R, la región encerrada por el gráfico de la función f(x) = 4x y el eje x, en el intervalo [-2, 2].
a. Dibujar la gráfica.
b. Calcular gráficamente el área de la región.
c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$
d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores?
Justificar cada paso.

Figura 1. Tarea 2

Fuente: elaboración propia

El alumno hace inicialmente una representación gráfica de la función.

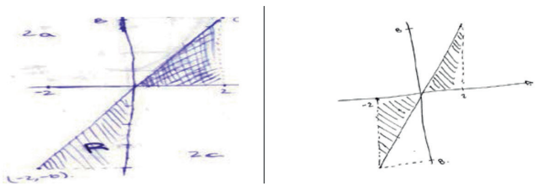


Figura 2. A7, representación G de la tarea 2 en el cuestionario y durante la entrevista

Fuente: elaboración propia

En el cuestionario dibuja la gráfica de la función, sombrea el área que se le pide calcular, y a partir de la representación gráfica (**G**), calcula el área de forma algebraica (**A**).

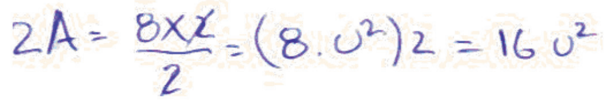


Figura 3. A7, 1ª resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Fuente: elaboración propia

A pesar de que el resultado es correcto, en la sucesión de igualdades se olvidó multiplicar por dos al pasar del primer a segundo término, aunque luego lo corrigió en la siguiente igualdad. En la entrevista, él mismo describe lo que hizo de la siguiente forma:

A7: —Aquí vemos 2 triángulos (traza el gráfico).

I: — ¿Cómo calculó el área geométricamente?

A7: —Geométricamente, es la suma de 2 triángulos de base 2 y de altura 8, que en su defecto podría calcularse el área de un rectángulo.

I: — ¿Por qué?

A7: —El intervalo es de -2 a 2.

I: — ¿Qué valor obtuvo al graficar el área?

A7: —16 unidades cuadradas.

Para calcular el área gráficamente, forma dos triángulos que, como él dice, conformarían un rectángulo, y durante la entrevista, igual que en el cuestionario, a partir del gráfico calcula el área total y obtiene 16 unidades cuadradas. Aplica el elemento matemático área como aproximación (**ACA**) de forma **A**, porque utiliza la fórmula del área del triángulo y como los triángulos son iguales entonces la duplica para obtener el área total. En cuanto al cálculo de la integral, en el cuestionario da la siguiente solución de forma **A**:

$$2c.\ \int_{-2}^{2} 4x\,dx = \frac{4x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2x^2\Big|_{-2}^{2} = 8-8=0\,u^2$$

Figura 4. A7, 2ª resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Fuente: elaboración propia

Además, el estudiante muestra la relación que establece entre el área y la integral:

I: — ¿Qué valor obtuvo al calcular la integral?

A7: —0 unidades cuadradas.

I: — ¿Cuál es la diferencia entre calcular el área gráficamente y calcular esa integral?

A7: —Pienso que si me dicen calcule esta integral y me da cero puede tener sentido, si me dicen calcule la integral que corresponde a este gráfico me parece que así como se plantea aquí, es una integral sin contexto.

I: — ¿Qué quiere decir sin contexto?

A7: —Que no me está representando un área.

I: — ¿Cómo son los 2 resultados?

A7: —Los dos resultados son diferentes.

I: — ¿Por qué son diferentes?

A7: —Porque uno es un ejercicio de calcular una integral y el otro de calcular un área.

I: — ¿Cuándo le piden calcular el área a qué debe llegar?

A7: —Debo obtener un número real positivo.

I: — ¿Cuándo le piden calcular una integral, cuál puede ser ese valor?

A7: —Si la integral es definida puede ser un número real positivo, negativo o cero.

Distingue el elemento matemático la integral definida (LID) de su aplicación como área de regiones planas porque argumenta que cuando se aplica la Integral Definida como área, ésta representa un valor positivo, mientras que el cálculo de la Integral Definida es un valor real positivo, negativo o cero.

En esta otra tarea:

Calcular el área limitada por la gráfica de la función, $f(x) = |2x - 1|$, en el intervalo [0,2] y el eje x. Justificar la respuesta.

Figura 5. Tarea

Fuente: elaboración propia

Este alumno analiza los valores que toma según sea positiva o negativa la función $2x - 1$, aunque en el planteamiento se confunde entre las abscisas y las ordenadas y considera los casos en que x sea positivo o negativo.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x>0 \\ -2x+1 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

si $x=1$, $y=1$
si $x=2$, $y=3$
si $x=0$, $y=1$

Figura 6. A7, representación A de la tarea 4 durante el cuestionario

Fuente: elaboración propia

Esto mismo lo expresa durante la entrevista. Está trasfiriendo directamente lo que recuerda del valor absoluto de x, al valor absoluto de $2x - 1$.

> A7: —El valor absoluto de esa función, habría que redefinirla, como la función va a valer $2x - 1$, si x es mayor que 0 vale , si $-(2x + 1)$, si x es menor o igual a 0. (**A7E4**).

A pesar de ello, para poder representar gráficamente la función, tiene que dar valores a x para obtener valores de y.

> I: — ¿Podría decirme cómo ha esbozado el gráfico de la función?
>
> A7: —Teniendo la función, tabulé le di a x tres valores.
>
> **(A7E4)**.

Finalmente representa la gráfica correctamente.

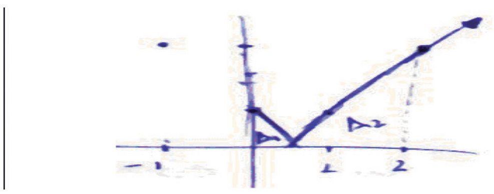


Figura 7. A7, representación G de la tarea 4 del cuestionario

Fuente: elaboración propia

Una vez representada gráficamente la función, el estudiante calcula el área limitada por la gráfica relacionando varios elementos matemáticos de forma A.

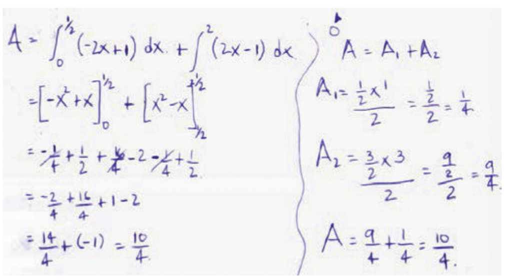


Figura 8. A7, resolución A de la tarea 4 del cuestionario

Fuente: elaboración propia

En la columna de la derecha se puede ver cómo aplica el elemento matemático el **ACA**. A partir del gráfico calcula el área de los triángulos que conforman el área total, las suma y obtiene el área que se le pide. Para ello ha necesitado coordinar los registros gráfico y algebraico. En la columna de la izquierda utiliza los elementos matemáticos: la integral definida (LID), propiedades de la integral definida (PID) y el teorema fundamental del cálculo (TFV), porque calcula el área a partir del planteamiento de una integral, aplica la propiedad de la unión de intervalos correctamente y utiliza la regla de Barrow para hallar las primitivas y evaluarlas en los límites respectivos. Cuando se le preguntó por la solución mediante el cálculo de las áreas de los triángulos lo justifica de la siguiente forma:

> I: — ¿Cómo ha calculado el área, a partir de la representación gráfica?
>
> A7: —Calculando dos integrales, una de 0 a $\frac{1}{2}$ de la función, más otra de $\frac{1}{2}$ a 2.
>
> I: — ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?
>
> A7: —2 triángulos.
>
> I: — ¿Cómo calcularía el área de esos 2 triángulos?
>
> A7: —Tenemos dos triángulos, vamos a llamarlos a_1 y a_2, el triángulo a_1 tiene de base $\frac{1}{2}$ y de altura 1.
>
> I: — ¿De dónde obtiene la altura, cómo obtiene la altura de ese triángulo?
>
> A7: —Evaluando la función en $x = 0$, obtengo un punto.
>
> I: — ¿Por qué en $x = 0$?

A7: —Porque el intervalo de integración es [0,2], entonces necesito saber de dónde a dónde va la gráfica, y los puntos para evaluar son cuando x vale 0 y cuando x vale 2.

I: —Continué el procedimiento.

A7: — el segundo triángulo tiene de base $\frac{3}{2}$ y de altura 3, entonces el área es $\frac{9}{4}$, y el área del primer triángulo es $\frac{1}{4}$ (hace cálculos).

I: — ¿Cuál sería el área total?

A7: —El área total seria $\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$, la suma de las áreas de los dos triángulos esto es $\frac{10}{4}$ **(A7E4)**.

El estudiante describe los procedimientos utilizados en el desarrollo de la tarea, y compara los valores obtenidos a partir del uso del elemento **ACA** y del elemento **LID**:

I: — ¿Cómo son los valores obtenidos?

A7: —Son exactamente iguales

(A7E4).

En este mismo sentido, y con el objeto de confrontar la información descrita anteriormente, en el mapa conceptual que se presenta a continuación se ponen de manifiesto los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que este alumno recuerda. Los mismos elementos que plantea en esta representación son los que utilizó a largo del cuestionario y durante la entrevista para la resolución y argumentación de las tareas.

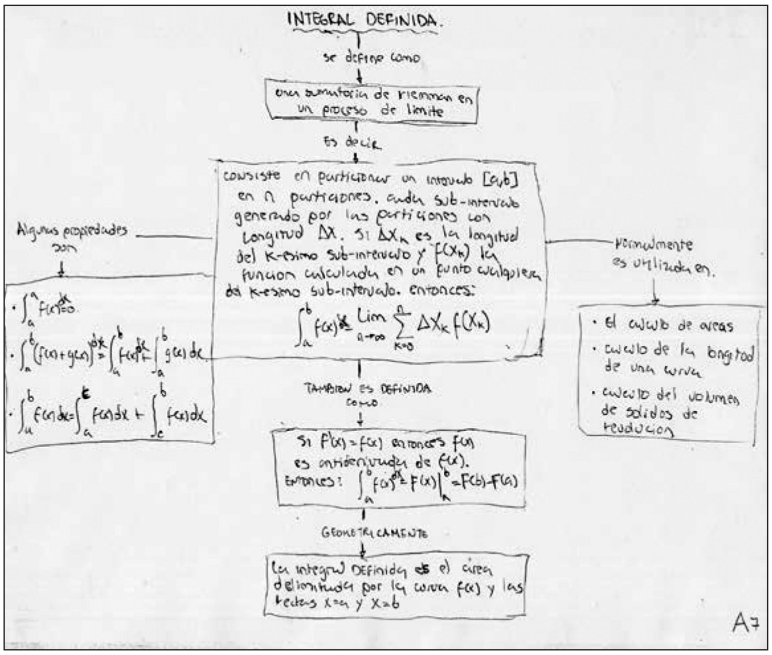


Figura 9. A7, mapa conceptual que representa el concepto de Integral Definida

Fuente: elaboración propia

Conclusiones

El conocimiento humano es una construcción social donde cada construcción nueva se apoya en construcciones previas. La argumentación es una forma de comunicación y diálogo para evaluar, definir y estimular producciones. No todos los temas de estudio son ideales para un estudio argumentativo; en consecuencia, la elección requiere un análisis didáctico y fundamentación previa. La argumentación surge si se explican las actividades en clase, y los criterios del ejercicio argumentativo consistente con las metas pedagógicas.

Referencias

Chevallard. (1998). *La transposición didáctica del saber sabio al saber ensenado*. (Vol. 5, II). Argentina: Aique Grupo editor.

Dorio, I., Massot, I. y Sabariego, M. (2009). Características Generales de la Metodología Cualitativa. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la Investigación Educativa* (2ª ed.). Madrid: La Muralla. S.A.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations – the logic of mathematical discovery.* Cambridge, MA: The University Press.

Maldonado, L. F., Drachman, R., De-Groot, R., Gutiérrez, J., Muñoz, O., Bernal, R., Lizcano, A., Macías, D., Serrano, E., Vargas, E. C., Rodríguez, G. E., Rodríguez, M. S., y Jaime, R. V. (2012). *Argumentación para el aprendizaje colaborativo de la matemática*. Bogotá: Ediciones Fundación Universidad Central

Schwarz, B. B., Hershkowitz, R. and Prusak, N. (2010). Argumentation and mathematics. In Howe, C. and Littleton, K. (Eds.), *Educational dialogues: understanding and promoting productive interaction*. Estados Unidos y Canadá: Routledge.

Toulmin, S.E. (1958). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

La perspectiva sociocultural en el análisis de la práctica de los docentes universitarios de precálculo: la enseñanza de la función exponencial[1]

The sociocultural perspective on the analysis of the practice of university teachers of pre calculation: The teaching of the exponential function

A perspectiva sociocultural na análise da prática de professores universitários de cálculo: o ensino da função exponencial

Fecha de recepción: marzo de 2014

Fecha de aceptación: julio de 2014

Jeannette Vargas Hernández[2]

Resumen

En este artículo se presentarán algunos resultados de una investigación de corte cualitativo que se enfoca en un estudio de caso; el caso de Ernesto. En ella se dio respuesta a las preguntas: ¿cómo modelan los profesores de precálculo en su práctica docente los mecanismos de construcción del concepto de función exponencial? y ¿cuáles son las características que subyacen a las prácticas analizadas?

Palabras clave: precálulo, universitarios, función exponencial, enseñanza, práctica, docentes.

Abstract

Some results from a qualitative-style research will be presented. The research is focused on the study of Ernesto's case. It was given answer to the questions: in which way precalculus teachers give form to the means of construction of the exponential function concept and which are the characteristics that are underneath the analyzed practices?

Keywords: Precalculus, college, exponential function, teaching, practice teaching.

Resumo

Alguns resultados de uma pesquisa qualitativa de estilo será apresentado. A pesquisa está centrada no estudo de caso de Ernesto. Foi dada resposta às perguntas: de que forma os professores precalculus dar forma

1 Artículo de investigación.

2 Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Bogotá- Colombia.. Contacto: jvargash@unicolmayor.edu.co

aos meios de construção do conceito de função exponencial e quais são as características que estão debaixo das práticas analisadas?

Palavras-chave: precalculus, universitários, função exponencial, de ensino, de ensino prática.

Introducción

La literatura de investigación en educación muestra que, hace aproximadamente cuatro décadas, la enseñanza se consideraba un arte y, en consecuencia, era difícil de analizar, intervenir y someter a ciertas reglas. La manera de concebir al profesor y la enseñanza, desde la teoría y la investigación educativa, ha sufrido una evolución que se puede ver en términos del objeto específico de estudio o de la complejidad considerada.

En la década de los años ochenta, y a partir de autores como Donald Schön (1983, 1987), se asume que los profesores generan conocimiento sobre la enseñanza a partir del trabajo práctico que realizan en aulas particulares, y que ese conocimiento merece ser investigado. Al mismo tiempo, surge con fuerza el interés en las creencias, desde diversas disciplinas como psicología, ciencias políticas, antropología y educación. Entre los educadores, el interés en el estudio de las creencias y concepciones de los profesores lo alimentó el cambio de paradigma, el pasar de concebir al profesor como un técnico a concebirlo como un ser pensante, reflexivo.

Así, a finales de la década de los años noventa surge el interés por comprender la gestión del docente y comienza a considerarse la importancia de analizar la actividad de los docentes en el aula. De igual manera, las creencias y las concepciones adquieren un papel prominente como base para estudiar a los profesores de matemáticas y su enseñanza.

Según Sánchez (2010, 2011), en la actualidad, en el campo de la educación matemática se percibe un aumento de los estudios que investigan las creencias del profesor al igual que aspectos particulares de las prácticas de los docentes en el aula —decisiones fuera del aula de clase, los recursos usados por los profesores para definir el contenido de las lecciones, aspectos concretos de las prácticas de los docentes en el aula; por ejemplo, los tipos de preguntas formuladas durante las clases—. Sin embargo, es necesario ampliar la investigación en el campo a nuevas temáticas (Camacho, 2011) de manera que los problemas de investigación también se sitúen en el nivel universitario (Moreno, 2011). Esta investigación aborda el análisis de la práctica de docentes en el nivel universitario y se enfoca en la enseñanza de funciones exponenciales, pretendiendo contribuir a llenar los espacios vacíos mencionados por Camacho y Moreno.

Referentes teóricos

En esta investigación se acude a que la visibilidad del discurso y la naturaleza de las acciones del profesor provienen de una perspectiva sociocultural y se reconoce que la práctica docente es una actividad mediada por el uso de ciertos “instrumentos” (Llinares, 2000) y por lo tanto permiten caracterizarla. Desde esta perspectiva, en segundo lugar, se asume “que los instrumentos utilizados y su forma de utilización influyen en el tipo de comprensión matemática” (Llinares, 2000, p.115) y el objetivo del profesor es favorecer dicha comprensión de los estudiantes.

En este artículo se presentan aspectos analizados concernientes al discurso en la práctica profesional de docentes universitarios, al enseñar la función exponencial en cursos de precálculo. Aspectos del discurso que forman parte de una investigación más amplia en la cual se analizan las fases de planificación y de gestión en el aula, tomando como referencia, por una parte, los mecanismos de construcción de un concepto matemático: interiorización, encapsulación y tematización, propuestos por Ed Dubinsky (1991 y 1996) y su grupo (Dubinsky, E. y Lewin, P., 1992; Dubinsky, E. y Mcdonald, M., 2001) en su teoría Action Process Object Schema (APOS); y por otra parte, la modelación de la descomposición genética de un concepto, constructo expuesto desde un marco sociocultural por Gavilán (2005).

En esta investigación el mecanismo de *interiorización* conlleva la construcción mental de una forma de conocer proceso a partir de una serie de acciones sobre objetos cognitivos, es decir, las formas de conocer como acciones se interiorizan en procesos (Vargas, J, 2013). Así, para el concepto funciones exponenciales, se identifican tanto en el registro de representación simbólico como en el gráfico los siguientes descriptores del mecanismo:

Simbólico

- Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno.
- Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas $\frac{y_2}{y_1} = a^{x2-x1}$.
- Interiorización de las acciones de aplicar valores muy “grandes” a *x* y la aproximación de los valores de y a cero en el caso de la función decreciente y para *valores de x* muy “pequeños” en el caso de la función creciente.

Gráfico

- Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores.
- Representación del triángulo característico para diferentes puntos de la gráfica de una función.

Aspectos metodológicos

En el desarrollo de la investigación se distinguen claramente tres momentos. En el primero, tras la apropiación de un marco teórico, se construye una propuesta de *descomposición genética del concepto función exponencial* (Vargas, 2013). En el segundo, se recoge información directa de las sesiones de aula de los docentes de precálculo mientras enseñan la función exponencial y, a través de entrevistas semiestructuradas, se recoge nuevamente información directa sobre las intenciones de las acciones del profesor en cada una de las clases. En el tercero, se examina y analiza la práctica del docente, a través del constructo modelación de la descomposición genética para, posteriormente, determinar las características subyacentes a esa práctica, que determinarán lo que se denomina la perspectiva de la práctica (García, Gavilán y Llinares, 2012).

Respecto al segundo momento, se realiza la grabación de las sesiones de clase en las que se trabaja el concepto de función exponencial y de entrevistas video-grabadas, anteriores y posteriores a cada una de las sesiones para obtener información sobre su planificación. Para la clasificación, depuración y análisis de los datos se usa el programa Atlas.ti (Vargas, 2011, Vargas, Gonzáles y Llinares, 2011) y se realizan tres niveles de análisis: uno descriptivo y dos de inferencias para establecer los resultados de la investigación.

Se recurre a la viñeta como herramienta para organizar y presentar los resultados de los análisis de la práctica del docente (Gavilán y otros 2007a, 2007b). En ella se muestra una descripción detallada de los segmentos de la lección, considerados en términos de las tareas propuestas, los mecanismos de construcción potenciados por el profesor, el uso de los sistemas de representación y las relaciones entre los elementos del concepto. Los análisis relativos a la forma en que el profesor propicia la construcción de conocimiento y usa los instrumentos.

Lo anteriormente enunciado se ejemplifica, a través del caso de Ernesto, en la siguiente sección del presente artículo que es parte de la viñeta del mecanismo de interiorización; conformada tanto por segmentos de las clases del docente, segmentos de entrevistas e inferencias de los investigadores. Se analizan las relaciones entre los elementos matemáticos del concepto, el discurso del docente y el uso y justificación de la representación simbólica en situaciones de iteración.

Iteración de acciones de cálculo correspondientes a elevar la base fija a diferentes exponentes

En la clase 1, Ernesto propone una situación de doblez de papel para que el estudiante reflexione sobre la iteración y su representación por medio de un exponente. Para ello pide a los estudiantes tomar una hoja, doblarla por la mitad y luego nuevamente doblarla y así sucesivamente hasta que la situación física lo permita.

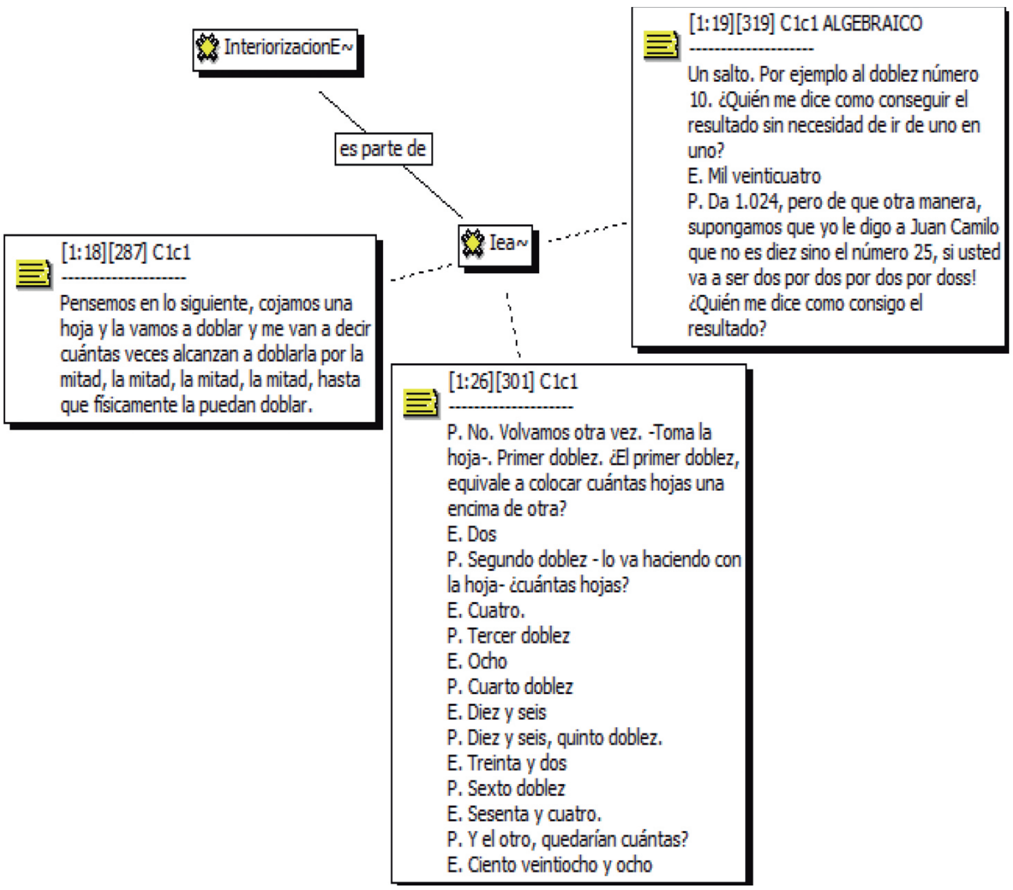


Figura 1. Preguntas referidas a iteración de acciones

Fuente: elaboración propia

La tarea de dobleces del papel ([301], [319]) propicia ciertas preguntas que conducen a reflexionar sobre las acciones correspondientes a repetir una serie de pasos un cierto número de veces. En este caso se trata de la multiplicación de dos por dos, luego otro dos y así sucesivamente. Esta multiplicación de factores iguales se puede expresar mediante el uso de exponentes naturales para representar dicho fenómeno.

Ernesto organiza los datos en el tablero utilizando una representación tabular de la relación entre los dobleces y el grosor, mediante el siguiente diálogo:

[1][313:321]

P: — Sexto doblez

E: — Sesenta y cuatro.

P: — Y el otro, ¿quedarían cuántas?

E: — Ciento veintiocho y ocho

P: — O sea, esta que ya no puedo doblar, sería 128. Hagamos una tablita donde se muestre eso -en el tablero dibuja y va hablando- a ver doblez número, equivale a que grosor dos el segundo cuatro, ¿el tercero cuánto fue?

E: — Ocho

P: — Cuarto diez y seis, quinto treinta y dos - escribe puntos sucesivos y dice - yo voy a pegar aquí un brinco, un salto.

Doblez (número)	*Grosor*
1→	2
2→	4
3→	8
4→	16
5→	32
⋮	⋮

Un salto. Por ejemplo al doblez número 10. ¿Quién me dice cómo conseguir el resultado sin necesidad de ir de uno en uno?

E: — Mil veinticuatro.

Haciendo uso de esta representación tabular [1][324:327], Ernesto expone a los estudiantes las potencias de dos que se han obtenido y los lleva a conjeturar sobre exponentes y potencias de pasos posteriores que no se pueden obtener en la actividad física de dobleces del papel. Estas reflexiones, suscitadas alrededor de la acciones de iteración y uso de los exponentes, forman parte de la interiorización de una función exponencial con base mayor que uno identificada en la descomposición de la función exponencial.

[1][324:327] SIMBÓLICO-Tabular

P: — Esto que está acá viene siendo las potencias de dos, esto es dos a la cero, esto es dos a la uno, doblez tres dos a la tres, doblez cuatro dos a la cuatro, y así. – el profesor completa la tabla en el tablero-

Doblez (número)	*Grosor*
1→	$2 = 2^1$
2→	$4 = 2^2$
3→	$8 = 2^3$
4→	$16 = 2^4$
5→	$32 = 2^5$
⋮	⋮

De manera que en el doblez 10 ¿sería dos a la?

La secuencia en el uso de la iteración que el profesor utiliza en la clase 1, es nuevamente usada en la clase 4 donde Ernesto presenta una tarea como parte de una evaluación corta escrita. En ella, los estudiantes deben imaginar que son participantes de un "reality", que han ganado una prueba, y que se les da a elegir entre dos premios. El ganador puede decidir, de forma justificada, si prefiere que le entreguen un premio que consiste en recibir un millón de pesos anual desde el momento actual hasta su muerte – bajo el supuesto que vivirá hasta los 80 años – o un premio que consiste en que en el primer año le dan 100 pesos, el siguiente año el doble, 200, el siguiente el doble del anterior 400, etcétera.

Cada estudiante realiza su elección por escrito que entrega al profesor y, posteriormente, en la clase 5, se trata de trabajar a través de la iteración. A continuación se presenta el diálogo correspondiente a la segunda opción de premio:

[5][624:64]

E: — Cien pesos

P: — Cien, después…

E: — Después doscientos

P: — Después doscientos, después…

P: — Después cuatrocientos, etcétera. El doble cada vez del año anterior. ¿Con qué función represento yo eso? ¿Cómo hacemos?

Voy a colocar algunas para que ustedes me digan con cuál función podría ser. A ver

Año cero, o sea el año en que uno recibe el premio, supongamos que en el año cero recibe los cien pesos.

Año uno, ¿cuánto es?

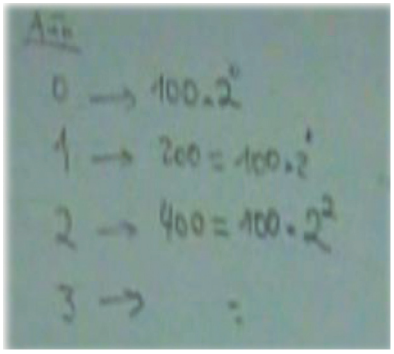


Figura 1. Ejemplo de clase

Fuente: elaboración propia

E: — Doscientos

P: — Doscientos, pero voy a escribir el doscientos de esta forma: como cien por dos. Ahorita vamos a ver por qué es conveniente escribirlo así.

Año dos, ¿cuánto recibiría la persona?

E: — Cuatrocientos

P: — Cuatrocientos, el doble del año anterior. ¿Pero eso equivale a decir cien por cuanto?

E: — Por cuatro

P: — Por cuatro, o sea ¿cien por dos a la qué?

E: — A la dos.

P: — A la dos, ¿sí? Aquí yo voy colocando los exponentes y voy a colocar aquí también ¿por dos a la qué?

P: — Bien, año tres, de una vez acá, quién me dice aquí cuánto es sin necesidad de…

Mediante la guía del profesor, los estudiantes realizan conjeturas sobre el uso de exponentes para representar acciones de iteración, lo que indica que el profesor busca que los estudiantes se den cuenta de la potencialidad de uso de los exponentes, con lo que se está modelando el mecanismo mediante la interiorización de las acciones en un proceso cuando se realizan iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando los casos en que la base es mayor que uno. Se esquematiza esta modelación en cada una de las clases a través de la siguiente síntesis.

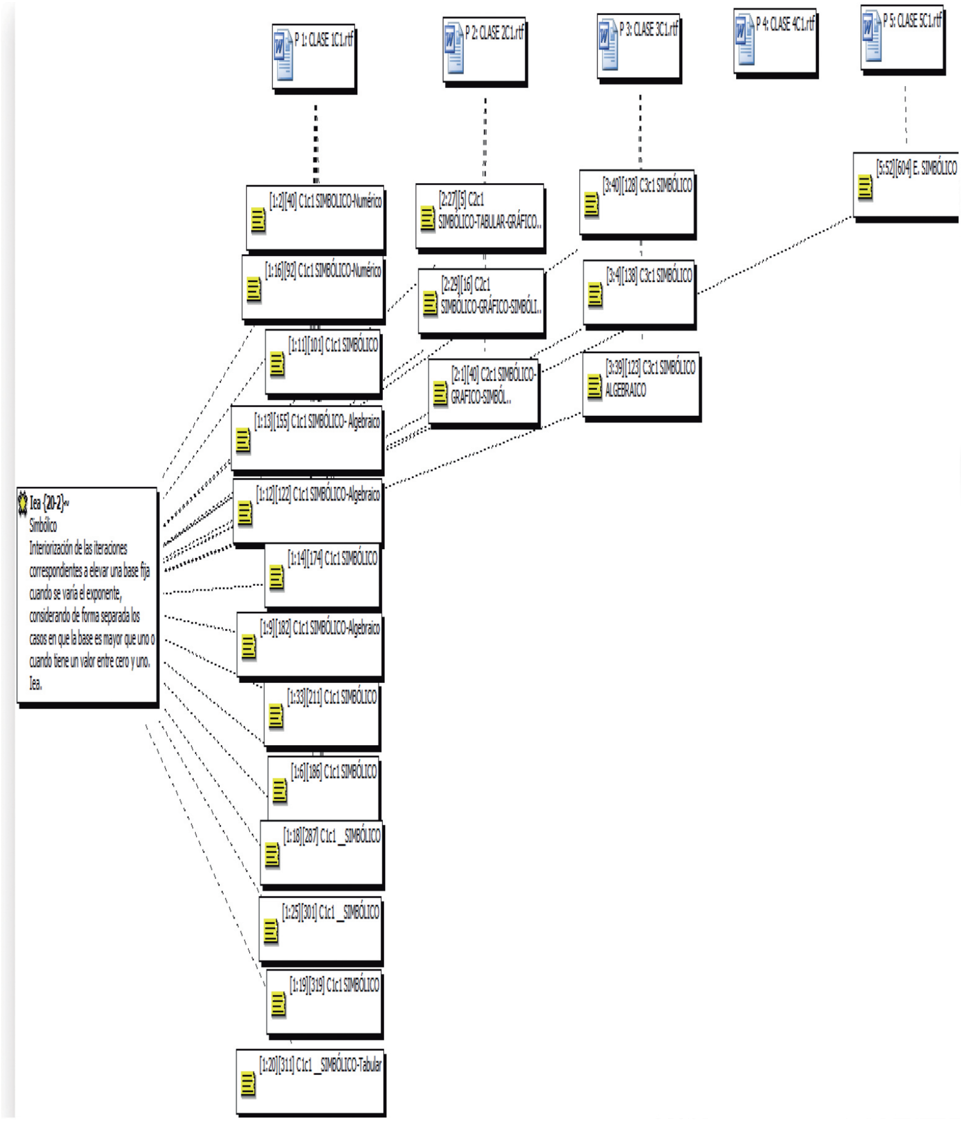


Figura 2. Síntesis. Interiorización de acciones de iteración

Fuente: elaboración propia

En relación con registro gráfico, en la clase 2, Ernesto retoma los datos numéricos y el registro tabular de la actividad de dobleces del papel y continúa con la modelación del mecanismo de interiorización proponiendo a los estudiantes la tarea de realizar la gráfica de la función $y = 2^x$. Dicha tarea parte de una representación tabular mediante la repetición de acciones de cálculo correspondientes a elevar la base fija, en este caso dos, e ir variando el exponente remplazándolo primero por sucesivos números enteros positivos para hallar el valor correspondiente.

Ernesto se interesa tanto por la adquisición de conceptos, como en el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo académico en general. Ya en la primera entrevista manifiesta estas ideas [31][33:36] que luego se muestran en su práctica docente.

> [31][33:36]
>
> I: — ¿O sea que la experiencia de dictar precálculo es agradable?
>
> P: — Para mí, si. Y eso depende de uno, uno puede hacer que el estudiante no se sienta bien presentando una cosa toda fea, pero si uno logra de alguna manera estimular al estudiante con las cosas que le presenta para que él tenga alguna satisfacción, o sea, hay ahí una cuestión muy humana y es que tú ves a una persona contenta haciendo algo, que te manifiesta con tranquilidad las dudas, hay una relación muy buena, que no solamente se limita al contenido sino que la parte de los afectos, de las emociones uno las tiene en cuenta. Si uno no tuviera en cuenta eso, para mí eso sería una cosa terrible, porque uno cada semestre hace lo mismo. Pero entonces claro las generaciones van cambiando y uno tiene que ir ajustando cosas, la tecnología le hace también a uno modificar cosas, entonces uno se va moviendo.

La organización de sus clases tiene en cuenta este aspecto afectivo. Ernesto considera relevante comenzar por elementos del contenido que le permitan al estudiante tener algún éxito y luego le plantea tareas guiadas para que pueda ahondar en otras construcciones.

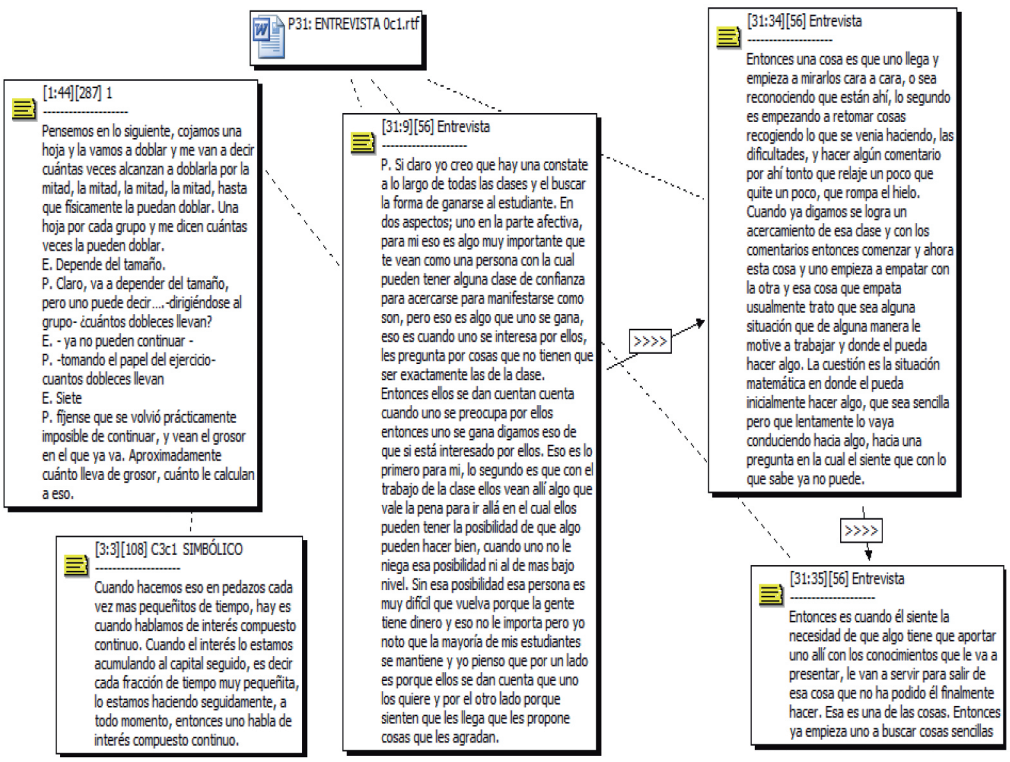


Figura 3. Presentación del contenido a estudiar

Fuente: elaboración propia

Conclusiones

Los aspectos anteriores muestran un modelo de la enseñanza de las matemáticas centrada en el estudiante. Es una visión constructivista del aprendizaje de las matemáticas. Se centra en el estudiante, a quien se le involucra activamente en la práctica de hacer matemáticas. El profesor es visto como facilitador y estimulador del aprendizaje del estudiante, planteando interesantes preguntas y situaciones de investigación, desafíos que le permitan al estudiante pensar y le ayuden a descubrir sus propios argumentos.

En este caso, la modelación del mecanismo de interiorización de la función exponencial privilegia la idea de iteración de las acciones como el medio usado por el profesor para que sus estudiantes construyan los procesos correspondientes a una función exponencial particular, bien en el registro numérico, bien en el algebraico o a través de una actividad manual concreta, que lleva a conjeturar sobre exponentes y potencias mediante una representación tabular, simbólica y gráfica.

Referencias

Camacho, M. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en el bachillerato y primeros cursos de universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*. Ciudad Real, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática & Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 24-41.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 3*(1), 47-70.

Dubinsky, E. and Lewin, P. (1992). Reflexive abstraction in mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior, 5,* 55-92.

Dubinsky, E. and Mcdonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Gavilán, J. M. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Edición Digital @tres, S.L.L. (2010).

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007a). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial de los estudiantes. *Educación matemática, 19*(2), 5-39.

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007b). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(2), 157-170.

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 219 – 235.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. da Ponte y L. Sarrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia Lisboa. Actas da Escola de Verao-1999*. Lisboa, Portugal: SEM-SPCE.

Moreno, M. M. (2011). Introducción al Seminario II sobre investigación en didáctica de las matemáticas por niveles educativos. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 119-123). Ciudad Real, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática & Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Sánchez, M. (2010). How to stimulate rich interactions and reflections in online mathematics teacher education? Roskilde, Dinamarca: Roskilde Universitet.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4): 129-145.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, United States of America: Basic Books.

Vargas, J. (2011). Atlas.ti y una descomposición genética como herramientas de análisis de la práctica docente: la función exponencial. En *Espacios de reflexión e intercambio de saberes*. Colombia: Escuela de matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Duitama.

Vargas, J. (2013). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales.* Tesis doctoral (inédita). Universidad de Salamanca.

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2011a). Atlas.ti como herramienta de análisis de la práctica docente: el caso de la función exponencial. En M. M. Moreno y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación de la SEIEM*. XIV Simposio de la SEIEM. Lleida, España: Edicions de la Universitat de Lleida. Acceso: 4/10/12. Recuperado de: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIVSimposio.pdf

Agradecimientos: El proceso de investigación del que se desprende este artículo fue asesorado por la doctora María Teresa González Astudillo y el Doctor Salvador Llinares Ciscar.

Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional[1]

Pre calculus course in using supported geogebra for the development of variational thinking

Curso de pré cálculo apoiado no uso de geogebra para o desenvolvimento do pensamento variacional

Fecha de recepción: enero de 2014
Fecha de aceptación: julio de 2014

Jorge Enrique Fiallo Leal[2]
Sandra Evely Parada Rico[3]

Resumen

En este artículo se presentan los resultados iniciales del diseño, experimentación y evaluación de un curso de precálculo**,** planteado como una alternativa preventiva para afrontar la problemática actual de deserción y repitencia en los curso de Cálculo Diferencial en la Universidad Industrial de Santander. El propósito principal de dicho curso es aportar herramientas para desarrollar en estudiantes de primer nivel universitario su "pensamiento variacional"**,** con el fin de favorecer en ellos un nivel matemático pertinente a las exigencias del curso de Cálculo Diferencial. El trabajo en el aula está orientado al trabajo activo de los estudiantes en un proceso de resolución de problemas, en el que se involucre el razonamiento, la comunicación, la representación, las conexiones y la tecnología como claves para la producción de aprendizajes significativos, alrededor de las dos ideas centrales del Cálculo Diferencial: la variación y la acumulación.

Palabras clave: precálculo, cálculo, acumulación, pensamiento variacional, GeoGebra.

Abstract

We present initial results of the design, experimentation and evaluation of a course in pre-calculus, proposed as a preventive alternative to confront problematic present of desertion and repetition in the Differential Calculus course at the Industrial University of Santander. The main purpose of this course is to provide tools to develop in students their first university level its "variational thinking" with the purpose of favoring in them pertinent a mathematical level to the exigencies of the course of

1 Artículo de investigación.

2 Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). Contacto: jfiallo@uis.edu.co

3 Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). Contacto: sparada@uis.edu.co

Differential calculus. The classroom work is oriented to the active work of the students in a process of problem solving, in which the reasoning, communication, representation, connections and technology as key to the production of meaningful learning involves around of the two central ideas of differential calculus: variation and accumulation.

Keywords: Precalculus, calculus, accumulation, variational thinking, GeoGebra.

Resumo

Apresentamos resultados iniciais do desenho, experimentação e avaliação de um curso de pré-Cálculo, proposto como uma alternativa preventiva para enfrentar a problemática atual de deserção e repetência nos curso de Cálculo Diferencial na Universidade Industrial de Santander. O propósito principal de dito curso é contribuir ferramentas para desenvolver em estudantes de primeiro nível universitário seu "pensamento variacional", com o fim de favorecer neles um nível matemático apropriado às exigências do curso de Cálculo Diferencial. O trabalho no sala está orientado ao trabalho ativo dos estudantes num processo de resolução de problemas, no que se envolva o razonamiento, a comunicação, a representação, as conexões e a tecnologia como chaves para a produção de aprendizagens significativas, ao redor das duas ideias centrais do Cálculo diferencial: a variação e a acumulação.

Palavras-chave: pré-cálculo, cálculo, acumulação, pensamento variacional, GeoGebra.

Introducción

> *El Cálculo es un edificio intelectual enorme, articulado alrededor de dos ideas centrales: acumulación y variación*
>
> Ímaz y Moreno (2010)

El Cálculo Diferencial es uno de los cursos que representa una de las mayores problemáticas en los estudiantes universitarios debido a múltiples razones, entre ellas, a la falta de los conceptos previos necesarios para el inicio del curso y la dificultad que se presenta en los estudiantes para comprender los conceptos fundamentales. Al respecto, Hitt (2005) plantea que el Cálculo reúne una cantidad de conceptos que están íntimamente relacionados, y el manejo pobre de algunos subconceptos impide el desarrollo profundo de temas de Cálculo como límites, continuidad derivada e integral. Hitt señala algunas de las dificultades que tienen los estudiantes y algunos profesores de educación media para desarrollar un entendimiento profundo de estos conceptos. La dificultad respecto al concepto de función obedece a que, generalmente, se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en su comprensión. En general, las tareas de conectar diferentes representaciones de un concepto no son tenidas en cuenta por muchos profesores como algo fundamental en la construcción del conocimiento matemático. Por otra parte, aunque en los documentos orientadores del currículo matemático, tanto a nivel internacional (NCTM, 2003) como a nivel nacional (MEN, 1998, 2003, 2004, 2006), se propone que, además de los contenidos, se deben desarrollar procesos como la resolución de problemas, el razonamiento y la demostración, las representaciones, la comunicación y las conexiones, en las instituciones escolares de básica y media, los profesores siguen centrando su enseñanza en el aprendizaje de contenidos y algoritmos para la solución de ejercicios.

Ímaz y Moreno (2010) señalan que los libros de texto actuales de Cálculo Diferencial se han dedicado a proponer una especie de *análisis light*, con un exceso en el rigor que proviene de una concepción de la matemática moderna de hace más de cuatro décadas. En estos libros, los autores se preocupan por presentar las demostraciones de los teoremas más importantes del Cálculo Diferencial, pero no se realiza ninguna discusión sobre la comprensión de dichos conceptos y el proceso de demostración. Así, en los libros de texto se hacen intentos por explicar cada regla, lo que da a entender que el único objetivo es deducir la regla en elaboración para practicar con ejercicios, en lugar de utilizar las explicaciones como una herramienta de pensamiento. Las explicaciones son muy cortas con aspectos esenciales del razonamiento formal, por lo que los estudiantes deben acudir a los profesores para comprenderlas, pero el material proporcionado requiere profundización en el conocimiento matemático y pedagógico del contenido por parte de los profesores.

Como una alternativa de solución a la problemática, en varias universidades se ha propuesto el desarrollo de un curso de precálculo, enfocado al repaso de los conceptos, procedimientos y algoritmos necesarios en el curso de Cálculo Diferencial, generalmente repaso de temas como: conjuntos y operaciones, álgebra, ecuaciones, inecuaciones, trigonometría, geometría analítica, funciones y límites, sin tener en cuenta las orientaciones dadas para el desarrollo del pensamiento variacional (MEN, 2004), ni el uso de las tecnologías digitales. Es por ello que el curso de precálculo que se plantea en esta investigación, se propone como una alternativa preventiva para atender la problemática de repitencia y deserción referente a la materia Cálculo Diferencial, de las carreras de ingenierías y ciencias de la Universidad. El propósito principal del curso es desarrollar "pensamiento variacional", relacionado con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. En esta dirección, Vasco (2003) expresa que "el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que cavarían en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad" (p. 6).

A diferencia de un curso tradicional de precálculo, donde predomina el carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos y su objetivo principal apunta al repaso de los preconceptos necesarios para el curso de Cálculo Diferencial, o de los conceptos vistos en la secundaria. En este curso se incluyen representaciones generadas por GeoGebra y se enfatiza en el desarrollo del pensamiento variacional, a partir de un enfoque de resolución de problemas y lo que el estudiante comprende y puede hacer con el uso del software. Proveer a los estudiantes de representaciones dinámicas sobre ideas centrales de Cálculo, como la variación y la acumulación, puede generar en ellos un pensamiento dinámico que contribuye a la construcción de significados de las ideas estudiadas y sentar las bases necesarias para afrontar con éxito el curso de Cálculo Diferencial.

Se presentan en este artículo algunas consideraciones teóricas y metodológicas, como también algunos resultados obtenidos del diseño, experimentación y evaluación de un curso de precálculo con un enfoque de resolución de problemas de variación y acumulación, apoyado en el uso de GeoGebra como una herramienta cognitiva que ayuda al desarrollo del pensamiento variacional.

Marco conceptual

para la construcción de un marco conceptual que sustente esta propuesta, se presentan algunas investigaciones que dan cuenta de los errores y dificultades que se han detectado en el área, algunas sugerencias planteadas por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2004), por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2003) y algunos elementos teóricos propuestos para la construcción de un marco conceptual de un enfoque de resolución de problemas que incorpore el uso de las tecnologías digitales (Santos-Trigo y Moreno, 2013).

Respecto a las dificultades, Artigue (1998) reseña las investigaciones que muestran que las concepciones que tienen los estudiantes de los números reales, no son apropiadas para el aprendizaje de Cálculo, los estudiantes tienen dificultad para distinguir los diferentes conjuntos numéricos debido a la dependencia de las representaciones semióticas. En cuanto a las funciones, señala la dificultad que tienen los estudiantes para identificar lo que es realmente una función y el reconocimiento de las sucesiones como funciones; las dificultad para sobrepasar una concepción de función como proceso y la dificultad de relacionar la función como objeto y como proceso; la dificultad de relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones, y la dificultad para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico. Respecto a las dificultades con el concepto de límite, se destacan las investigaciones que señalan los obstáculos epistemológicos de los estudiantes, debido al sentido común de la palabra límite, que lleva a la concepción de límite como algo infranqueable o como último término de un proceso, o tienden a restringir la convergencia a la convergencia monótona; la sobregeneralización de procesos finitos a procesos infinitos, la fuerza de una geometría de las formas que impide que identifiquen claramente los objetos involucrados en el proceso de límite y su topología subyacente, haciendo difícil entender la sutileza entre el juego de marcos numéricos y geométricos.

Cantoral y Farfán (1998) plantean que "El desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico. Esa ruptura además, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación; sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se precisa entre otras cosas del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende".

A pesar de los estudios documentados por Artigue (1998) y los planteamientos realizados por Cantoral y Farfán (1998), se sigue observando en las aulas que "la instrucción" de dichos objetos matemáticos siguen estudiándose con un enfoque tradicional

—manejo algebraico y algorítmico—, de manera estática y con problemas rutinarios. Por ejemplo, para estudiar funciones, maestros y alumnos usan regularmente la definición estática de conjuntos, tablas y fórmulas, lo que conlleva a dificultades de interpretación de situaciones que no permiten ver los aspectos que desean verse con relación a la "variación". Al respecto, Carabús (2002) menciona que si el alumno concibe la función solamente como una correspondencia, no pone en juego su pensamiento y lenguaje variacional. En este sentido, el pensamiento variacional implica que el estudiante sea capaz de reconocer los valores que puede tomar una variable en cierto intervalo, así mismo necesita explorar cómo varía la función en dicho intervalo. López y Sosa (2008) enfatizan en que la forma como se trabajan estos conceptos no favorece la construcción de conceptos asociados con la funcionalidad del concepto; así mismo, mencionan que para evitar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en estos temas se requiere proveer experiencias de modelación y visualización que permitan explicar fenómenos de carácter variacional.

En el documento *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales* del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2004), se plantea que:

> El estudio de procesos de variación y cambio constituye uno de los aspectos de gran riqueza en el contexto escolar. El énfasis actual en la educación matemática orientado hacia el desarrollo del pensamiento matemático a partir de situaciones problemáticas significativas para los estudiantes, hacen del estudio de la variación y el cambio con mediación de herramientas tecnologías computacionales gráficas y algebraicas un campo de acción y formación potente en la educación matemática. Lo que se debe desarrollar es una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos (p. XXV).
>
> Se podría caracterizar el pensamiento variacional como la capacidad que tiene el estudiante para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas (p. 17).

En los principios y estándares del NCTM (2003, p. 300), se señala que:

> Los programas de enseñanza de todas las etapas, deberían capacitar a todos los estudiantes para: comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para analizar y comprender relaciones cuantitativas y analizar el cambio en contextos diversos.

Uno de los caminos para lograr la construcción del pensamiento variacional es mediante la resolución de problemas que promuevan el análisis de situaciones de variación y cambio a través de diferentes sistemas de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal. La calidad de la comprensión de la situación de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las diferentes representaciones. Para lograr esto, se pueden proponer diferentes representaciones de una situación de cambio para que sean contextualizados e interpretados por los estudiantes. También se deben plantear problemas para que el estudiante pueda producir una representación a partir de otra.

Lo anterior es posible mediante la presentación de simulaciones a los estudiantes o mediante la petición de producir una simulación a partir de las representaciones (MEN, 2004). Para el logro de estas metas, el uso de las tecnologías digitales ha sido incorporado en diferentes proyectos o programas académicos, logrando que los problemas o tareas matemáticas tengan un papel fundamental en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Se deben plantear problemas que permitan el cambio de una representación a otra haciendo énfasis en sus conexiones. En este sentido, GeoGebra se convierte en una herramienta poderosa, dado que se constituye en un laboratorio de experimentación, análisis, conjeturación, comprobación y conexión de las diferentes representaciones.

Con el objetivo de lograr la construcción de un marco conceptual en la resolución de problemas que incorpore el uso de herramientas computacionales, Santos-Trigo y Moreno (2013) plantean elementos de un marco conceptual que caracteriza las fases que sustentan el uso de las herramientas en la resolución de problemas, destacando entre sus componentes el acercamiento visual y empírico, la representación funcional, la búsqueda de diversos caminos para la construcción de un modelo algebraico que incluya métodos analíticos y geométricos, y la relevancia de contrastar los procesos y las estrategias utilizados en los diversos acercamientos.

Estos elementos y fases, están planteados, de manera implícita, en las sugerencias dadas en el documento del pensamiento variacional y tecnologías computacionales (MEN, 2004), en donde se recomiendan los siguientes momentos que se implementarán y profundizarán de acuerdo con el nivel del desarrollo cognitivo de los estudiantes y con los logros que se pretendan alcanzar:

- Observación de la simulación del fenómeno: descripción, predicción, verificación.
- Aproximación al tipo de gráfica que se producirá al relacionar las magnitudes que varían.
- Registro de los datos en una tabla y análisis de la información suministrada.
- Visualización de la gráfica formada por el conjunto de valores registrados y análisis de la misma.
- Relación entre los registros —tabular y gráfico—.
- Aproximación a la expresión algebraica que mejor relaciona las variables.
- Cálculo de regresión.
- Análisis de la función y de su relación con el fenómeno en estudio.
- Otras extensiones al estudio de la función: construcción geométrica de la derivada, análisis de la derivada, cálculo de la derivada, interpretación (MEN, 2004, p. 32).

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, el curso de precálculo se diseña como una alternativa preventiva que permita abordar la problemática de deserción y repitencia de los estudiantes del curso de Cálculo Diferencial. Lo que se debe desarrollar es una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de variación y cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos. Hay que partir de lo que el estudiante sabe y plantear tareas que involucren los conceptos e ideas fundamentales del Cálculo. Intentar resolver en un curso de precálculo lo que el estudiante no aprendió en la escuela es un método que generalmente fracasa (Moreno, 2012).

Aspectos metodológicos

Para poner en funcionamiento lo expuesto en los dos apartados anteriores, se planteó el diseño, desarrollo y análisis de resultados de un curso de precálculo, dirigido a 300 estudiantes de primer semestre de 2013 de las carreras de Ingeniería y Ciencias de la Universidad Industrial de Santander, que obtuvieron los resultados más bajos en una prueba de caracterización. Este proyecto requirió de tres momentos que se presentan a continuación.

Fase I. Diseño de las actividades

El diseño de actividades estuvo orientado a promover en el aula un proceso activo de resolución de problemas que involucran razonamiento, comunicación, representación, conexiones y el uso de la tecnología como claves para la producción de aprendizajes significativos alrededor de las dos ideas centrales de Cálculo: la variación y la acumulación. La puesta en marcha de las actividades pretende proveer a los estudiantes de herramientas, que les permitan responder favorablemente a las exigencias del curso de Cálculo Diferencial. Los criterios generales del diseño de las actividades fueron:

- Problematizar los contenidos de estudio de Cálculo con situaciones del contexto —un problema para cada sesión—.
- Generar espacios donde los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos, mediante la introducción de diferentes conceptos de Cálculo en el contexto de resolución de problemas.
- Hacer uso de la tecnología en todas las sesiones mediante el trabajo en computadores y con el apoyo de GeoGebra.

La componente didáctica para el diseño de las actividades, consistió en una reinterpretación de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, que dieron lugar a las siguientes pautas para su diseño:

1. Fase de información y exploración libre: al inicio de la actividad se plantea el problema relacionado con la temática a estudiar, para que el estudiante lo intente resolver de manera individual o en parejas, sin el uso del software. La idea fundamental de esta actividad consiste en que el estudiante utilice sus conocimientos escolares para resolver el problema de manera intuitiva y logre tener una aproximación a la solución. En esta fase se espera que el estudiante identifique la necesidad de utilizar nuevos conceptos, de aclarar conceptos vistos en el bachillerato y que el profesor identifique las principales dificultades conceptuales y los errores generales de los estudiantes.

2. Fase de socialización de los resultados obtenidos en la fase anterior: en esta fase el profesor promueve la participación de los estudiantes para que comuniquen sus soluciones, las discutan en grupo, se aclaren las dudas y, principalmente, se corrijan los errores, se repasen conceptos y se promueva la necesidad de ofrecer una solución matemáticamente válida al problema planteado.

3. Fase de exploración dirigida: en esta fase se parte de la exploración de un archivo en GeoGebra para que, a través de la exploración y de la orientación guiada por preguntas, el estudiante usando las diferentes herramientas del software, vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados visualizados en las diferentes representaciones que ofrece el software, a través de sus diferentes vistas —algebraica, hoja de cálculo, ventanas gráficas, Cálculo Simbólico - CAS, barra de entrada—. Igualmente, en esta fase se promueve que los estudiantes vean las conexiones que existen entre los conceptos trabajados y entre cada una de sus representaciones.

4. Fase de explicitación: en la actividad propuesta se sugiere la discusión con los estudiantes y con el profesor, se promueve la participación de los estudiantes para que éstos planteen sus propias soluciones y las discutan con el grupo y con el profesor. El papel del profesor debe ser la de promotor del debate, la reflexión y la discusión de las ideas expuestas, de tal manera que se llegue a la construcción del conocimiento, el cual es el objetivo de la actividad.

5. Orientación libre: se plantea un nuevo problema para aplicar lo que aprendió. Una tarea retadora, en donde el estudiante tenga que aplicar lo aprendido, pero no de manera mecánica.

Uno de los productos de esta fase fue el diseño de quince actividades con dos componentes: 1) trabajo con lápiz y papel, y 2) uso de la tecnología como medio de representación dinámica, comprobación y visualización de procesos que no son posibles de exponer con lápiz y papel. Otro producto fue la construcción de una versión de cada actividad para el estudiante y otra para el maestro. En esta última se expresa, en términos generales, la orientación de la actividad en el aula, los objetivos, el uso que se le debe dar al archivo y un análisis a priori de las posibles respuestas del estudiante. Las actividades diseñadas se titularon así: a) análisis de datos, b) números y operaciones, c) medidas, d) razones en el triángulo rectángulo, e) razones en el plano cartesiano, f) funciones trigonométricas, g) cuerdas vibrantes, h) fenómenos físicos, i) perímetro fijo-área variable, j) caja sin tapa, k) funciones por partes, l) derivada como razón de cambio, m) transformaciones de funciones y n) área fija-perímetro variable.

A manera de ejemplo, a continuación se muestra la actividad perímetro fijo–área variable, planteada al estudiante. Los comentarios que se hacen en seguida de cada actividad no van en la hoja de la actividad que se le entrega al estudiante, estos se dejan explícitos como guía para el profesor.

- **Actividad 1. Resuelve el siguiente problema en tu hoja de trabajo**

Un granjero tiene una valla de alambre de longitud 14 hectómetros para cercar un terreno rectangular, destinado a la siembra de pasto para el ganado. Si el granjero desea obtener la mayor extensión de cultivo posible ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno? Explica y justifica tu respuesta.

Comentario: en esta actividad se espera que el estudiante realice algunos cálculos numéricos —principalmente con números naturales— y dé una respuesta de valores de los lados del rectángulo entre 3 Hm y 4 Hm. La idea del número 14 es precisamente llevar al estudiante a pensar en otros conjuntos numéricos. Cuando los estudiantes discutan sus soluciones se darán cuenta que la solución no pertenece a los números naturales. Algunos estudiantes presentarán respuesta aproximadas a 3.5, pero no se atreven a decir 3.5 porque el rectángulo es un cuadrado y para ellos el cuadrado no es rectángulo. Estos procedimientos empíricos y concepciones erróneas las debe aprovechar el profesor para reflexionar sobre los conjuntos numéricos, las propiedades del rectángulo y la necesidad del uso de otros conceptos matemáticos para la resolución de problemas.

- **Actividad 2. Actividad de exploración**

Abre el archivo de GeoGebra “Perfijo_Area”, mueve el punto B, explora, observa, analiza y contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué magnitudes varían en esta situación?, ¿cómo varían esas magnitudes?

2. ¿Qué magnitudes permanecen constantes?

3. ¿Qué valores podrían tomar las magnitudes en observación y en qué unidades de medidas? Justifica tu respuesta.

4. ¿Qué sucede con una de las magnitudes a medida que varían las otras? Justifica tu respuesta.

5. ¿Existe alguna(s) variable(s) que dependan de otra(s)? Justifica tu respuesta.

6. Toma como variable independiente la base (lado AB) del rectángulo ABCD y asume que tiene longitud , elabora en la hoja de trabajo una tabla para algunos valores de (mínimo 10) y las áreas correspondientes a estos valores ¿Cómo halló el área?

7. Elabora en la hoja de trabajo una gráfica con los datos obtenidos en la tabla anterior.

8. ¿La gráfica obtenida sugiere una función? Si es función, ¿cuál sería esa función? Justifica tu respuesta.

9. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área?, ¿por qué?, ¿qué rectángulo es?

10. ¿Es suficiente la información obtenida hasta ahora, para resolver el problema? Justifica tu respuesta.

11. Elabora una conclusión acerca de lo trabajado hasta el momento.

Comentario: en esta actividad se parte de un archivo dinámico construido en GeoGebra figura 1) para que el estudiante explore, identifique los variantes e invariantes y trate de dar una solución el problema apoyado en lo que visualiza en el archivo y lo que escribe en su hoja de trabajo.

En este punto se espera que los estudiantes identifiquen que las dimensiones de los lados del rectángulo varían, lo cual le permitirá concluir que el área del rectángulo también varía y que el perímetro sigue siendo constante. Aunque hay una dificultad ligada a este fenómeno, lo cual se debe a que los estudiantes conciben la variación al transcurrir el tiempo, pero en esta situación no es el caso. Sin embargo, ellos podrían pensar que al variar con el tiempo también lo hará. Los estudiantes deben notar que a medida que los valores aumentan de 0 a 7, los valores de disminuyen de 7 a 0. Además los estudiantes necesitan tomar conciencia del por qué no puede tomar valores menores que cero ni mayores que siete, si esto no pasa, el profesor debe plantear preguntas que le permitan identificar lo anterior descrito, preguntas cómo, ¿qué sucede si el valor de es 2 Hm?, ¿qué sucede si el valor de es 4 Hm?, ¿qué sucede si el valor de es 6 Hm?, ¿qué sucede si el valor de es mayor que 6 Hm?

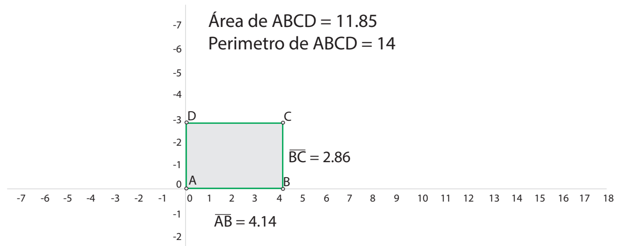


Figura 1. Imagen del archivo Perfijo-Área

Fuente: elaboración propia

Los estudiantes podrán visualizar una posible solución al problema analizando los datos numéricos y podrán tener una aproximación de la gráfica de la función que modela el problema, pero algunos todavía no podrán encontrar su expresión algebraica. Aquí se debe analizar el comportamiento analítico de la gráfica del problema y se puede aprovechar para hablar de las propiedades geométricas y analíticas de la parábola, se debe promover que los estudiantes "vean" que el rectángulo de mayor área con perímetro fijo es el cuadrado. Para esto es importante enseñarle a los estudiantes que los datos numéricos que muestra el software son apenas aproximaciones de números racionales, debe aumentar el número de cifras decimales y hablar de la limitaciones del software y de la necesidad de una justificación matemática de lo que ellos están observando, en ningún momento hay que dejarlos conformar con la justificación de que "eso es así porque ahí se ve". El profesor debe insistir en que los estudiantes justifiquen por escrito todas las respuestas que dan, con esto se están promoviendo los procesos de comunicación razonamiento y demostración.

- **Actividad 3.** Socializa con tus compañeros y el profesor las conclusiones realizadas.

Comentario: como se mencionó al principio, esta fase se debe aprovechar para la comunicación de ideas y la discusión de las soluciones sin dar respuestas definitivas por parte del profesor, son los estudiantes quienes discuten y defienden sus puntos de vista con la orientación del profesor.

- **Actividad 4. Uso del software como herramienta de exploración y verificación.**

1. Abre el archivo "Perfijo_Area". Lleva el punto B hasta el origen del plano (punto (0, 0)) ¿Existe rectángulo? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor del área? ¿Cuál es el valor de perímetro?

2. Abre la hoja de cálculo de GeoGebra y dale animación automática al punto B. ¿Qué datos están registrados en la hoja de cálculo?

3. Lleva nuevamente el punto B hasta el origen del plano cartesiano. Abre la vista algebraica y muestra el punto P, dale animación automática al punto B y observa la trayectoria de P. ¿Qué representa el punto P? ¿Qué representa el rastro de P?

4. En la hoja de cálculo, escoge el modelo de regresión que mejor se ajuste a los datos y llévala a la vista gráfica. ¿La función es la misma que obtuviste en el punto 8 de la actividad 2?

5. ¿Cuál es la función que modela el problema? Explica tu respuesta

6. ¿Cuáles deben ser las dimensiones exactas del terreno para que su área sea máxima? Explica tu respuesta.

Comentario: aquí se quieren aprovechar las potencialidades del software para que los estudiantes vayan realizando las conexiones entre las diferentes representaciones de los conceptos involucrados en la solución del problema y obtengan la expresión algebraica de la función que representa la solución del problema. El profesor debe orientar al estudiante a que ellos sean conscientes que la solución numérica, geométrica, grafica, algebraica y analítica que están visualizando corresponde a diferentes representaciones de la solución del problema (figura 2).

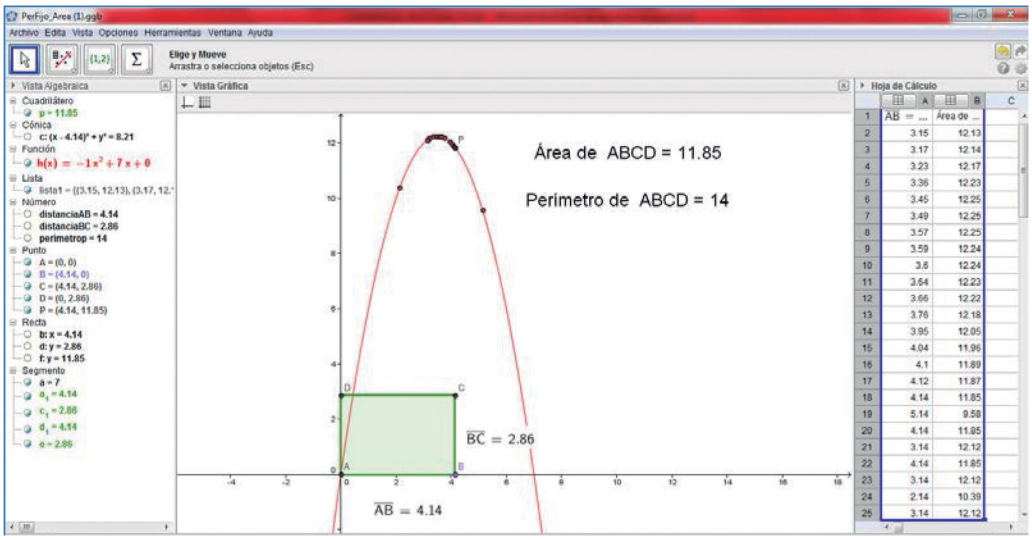


Figura 2. Diferentes representaciones de la solución del problema

Fuente: elaboración propia

Como en todas las actividades, se insiste que el estudiante debe justificar todas sus respuestas con miras a llegar a la solución matemática del problema, de esta manera se promueve la comunicación, el razonamiento y la demostración, de tal manera que el estudiante no se quede satisfecho con lo que ve en el computador o hace el computador, debe buscar respuestas en la teoría matemática. En esta actividad el profesor debe explicar que la ecuación resultante es la síntesis de los datos que suministra el problema, es decir, dado el rectángulo (figura 3).

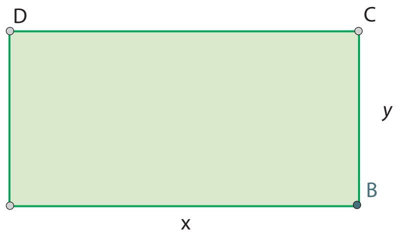


Figura 3. Rectángulo ABCD de lados x, y

Fuente: elaboración propia

Si el perímetro es fijo (en este caso 14) se deduce la ecuación $2x+2y=14 \Rightarrow x+y=7$ Significa que el valor máximo de uno de los lados es 7.

Despejando y se obtiene la expresión $y=7-x$, lo que explica que el máximo valor de y es 7, cuando x es 0 y el mínimo valor de y es 0, cuando x es 7.

El área del rectángulo ABCD es $A=xy$, reemplazando $y=7-x$, se obtiene $A=x(7-x)=7x-x^2$, que es la ecuación dada por el software.

El profesor puede aprovechar las herramientas del software para empezar a trabajar la noción de la derivada como razón de cambio y como pendiente de la recta tangente a la curva por el punto P. Puede solicitar a los estudiantes que introduzcan en la hoja de cálculo valores del lado desde 3.40 hasta 3.51, arrastrando el punto B con la tecla de mayúsculas (shift) sostenida y la tecla de la flecha hacia la derecha —de esta manera la variación de es en décimas, centésimas o milésimas, … según se quiera—. De esta manera se tienen los valores del lado y del área cercanos al máximo en las columnas A y B, en la columna C se pide hallar la diferencia entre los valores de A ($\Delta A=A_2-A_1$) y en la columna D la diferencia entre los valores de x ($\Delta x=x_2-x_1$), en la columna E la razón $\frac{\Delta A}{\Delta x}$. El profesor deberá orientar al estudiante para que analice los valores numéricos de cada una de las columnas y observe que, a medida que la diferencia Δx se aproxime a 0, la razón $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ se acerca a 0 para valores cercanos por la izquierda y por la derecha a 3.5. Observará que las variaciones de A son muy cercanas y por eso ΔA tiende a 0. También observará que para valores a la izquierda de 3.5 la razón es positiva y a la derecha es negativa (figura 4), lo que permitirá discutir ideas crecimiento y decrecimiento, así como de la derivada como pendiente de la recta tangente.

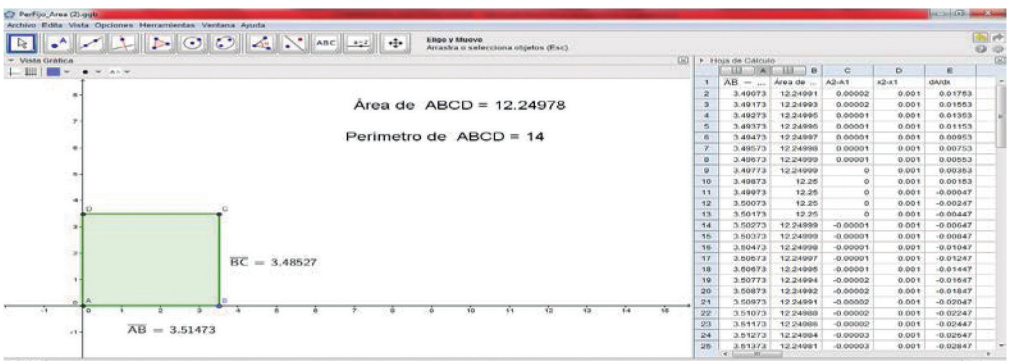


Figura 4. Visualización del comportamiento de la derivada como razón de cambio

Fuente: elaboración propia

Se podrán aprovechar los datos anteriores para realizar el análisis de la variación del lado x y de la razón $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ para que los estudiantes se den cuenta que en este caso las variaciones son proporcionales e igual a 2. Con la ayuda de la herramienta de regresión de dos variables con los datos de la columna A y E para que el estudiante vea la ecuación de la derivada $\frac{dA}{dx}$ es la recta y = 7 - 2x.

Para introducir la idea de derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P y no tener problema de bloqueo con el software, se deben eliminar los datos recogidos en la lista que automáticamente crea el software —lo cual elimina la ecuación $f(x)=7x-x^2$ que representa el área en función de lado x—. Ya conocida la ecuación se introduce en la línea de entrada —posiblemente la llame $g(x)=7x-x^2$ u otro nombre en la vista algebraica—, se muestra el punto P y en la barra de entrada se solicita la tangente del punto P de la función (x). Posteriormente en la barra de entrada se solicita la pendiente de la recta tangente por el punto P y se puede visualizar la recta con los valores de la pendiente (figura 5), analizar el comportamiento de estos valores y ver que la pendiente de la recta tangente tiende a 0, cuando tiende a 3.5, igualmente que cuando la función es creciente la derivada es positiva y cuando es decreciente la derivada es negativa. Se podría analizar los valores de x y de la pendiente en la hoja de cálculo y llegar a la ecuación y=7-2x de la derivada del área con respecto al lado .

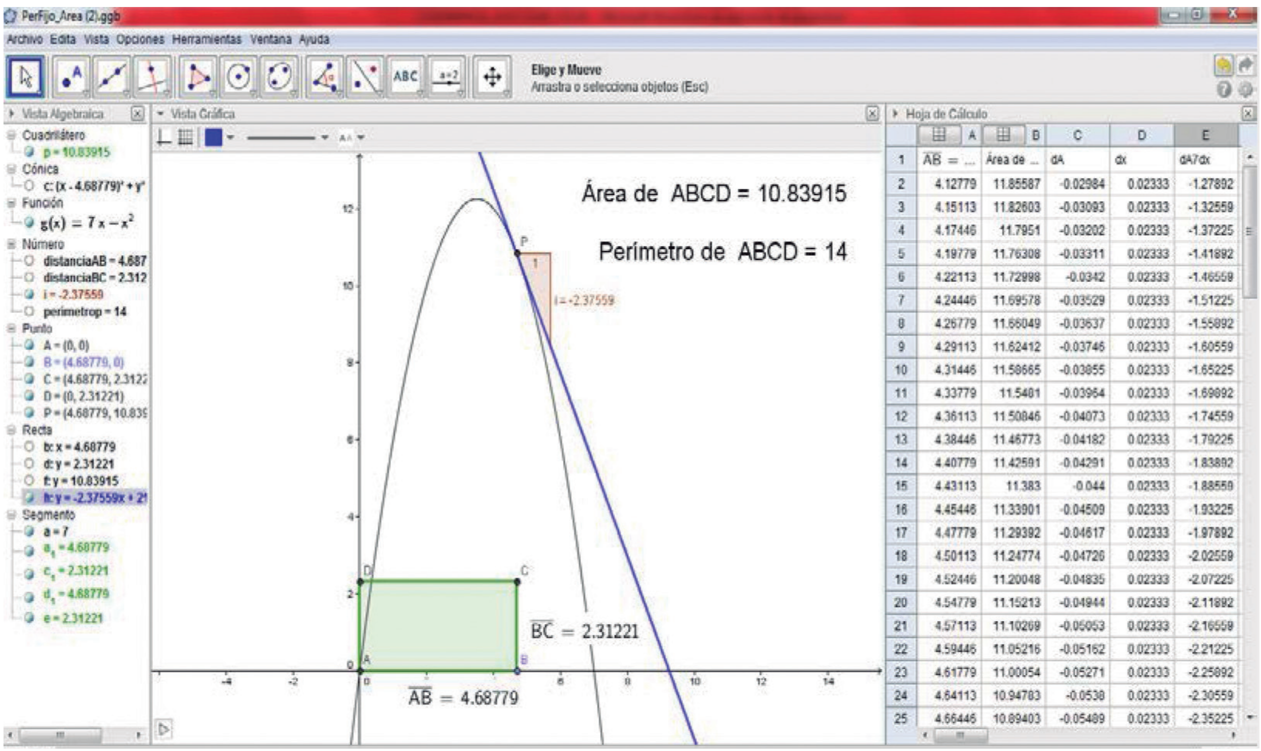


Figura 5. Visualización gráfica, numérica y algebraica de la pendiente de la recta tangente a la función g(x) en el punto P

Fuente: elaboración propia

Se espera que con estas actividades, algunos estudiantes puedan comprender por qué el área máxima se da cuando .

- **Actividad 5. Orientación libre**

1. Abre el archivo Actividad 5.ggb[4] en el cual el deslizador representa el perímetro del rectángulo.

2. Con el deslizador fijo en 256, mueve el punto C (Rojo) hasta lograr aproximadamente el área máxima para el rectángulo, luego registra el valor de obtenido.

3. Repite el paso anterior fijando el deslizador en 5 valores diferentes, para completar la tabla 1.

Perímetro (p)	x que hace el área máxima
256	

Tabla 1

Fuente: elaboración propia

4. Basado en la información de la tabla anterior, plantea una conjetura que relacione el valor de x—para el cual se obtiene el área máxima— y el perímetro p —si es necesario agrega más datos a la tabla—. Argumenta por qué tu conjetura planteada es cierta.

5. Cambia la escala al eje y, de modo que se aprecien en la pantalla valores de este eje, entre 0 y 6000 —Aparecerá un punto azul en la pantalla—.

6. Mueve nuevamente el punto C (Rojo) y comprueba tu conjetura planteada en 4 y concluye (Fije p en diferentes valores).

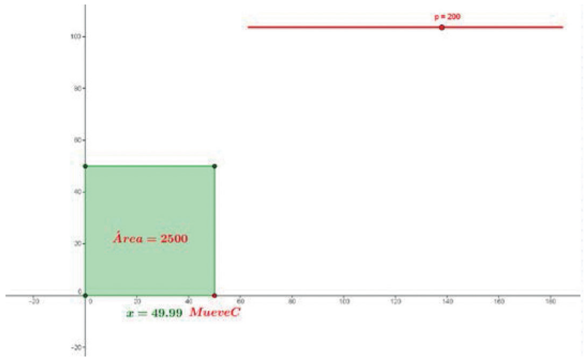


Figura 6. Imagen del archivo Actividad 5.ggb

Fuente: elaboración propia

Comentario: con este problema, a partir de la exploración del archivo dado (figura 6) se quiere lograr que el estudiante comprenda que, independiente del perímetro dado, el rectángulo de mayor área será un cuadrado de lado $x = \frac{p}{4}$.

Fase II. Desarrollo del curso

Esta fase se desarrolló durante catorce sesiones de trabajo diario de cuatro horas, durante el receso académico. Se conformaron diez grupos de 30 estudiantes —siete grupos por la mañana y tres por la tarde—. Cada sesión se desarrolló en una sala de informática, dispuesta con 20 o más computadores, de tal manera que los estudiantes pudieran trabajar individualmente o preferiblemente en parejas. Según la estrategia didáctica adoptada y las fases de aprendizaje propuestas, la metodología de la clase implicaba que el estudiante debía enfrentar individualmente o en parejas a la solución del problema, sin que el profesor lo resolviera. El papel del profesor consistió en resolver inquietudes de comprensión

4 El archivo dinámico se entrega construido al estudiante. La figura 6 ilustra una imagen del archivo.

del problema, planteamiento de preguntas, recordar algunos conceptos y procedimientos, orientar sobre el uso de GeoGebra como herramienta de visualización, exploración, análisis y comprobación de ideas, promover la participación y discusión sobre las soluciones, conceptos, generalizaciones y conclusiones, y finalmente institucionalizar el conocimiento.

Fase III. Instrumentos de control y de evaluación

En esta fase se pretendía integrar la evaluación al proceso de enseñanza y aprendizaje, acorde a la metodología de aplicación, utilizado una variedad de indicadores que pueden ilustrar aspectos relevantes en el aprendizaje de los estudiantes. Se considera la evaluación como un proceso permanente de observación y constantes ajustes de juicios de valor por parte del profesor sobre la actividad matemática realizada por los estudiantes. Esta observación directa estuvo basada en la comunicación de justificaciones orales o gráficas de los estudiantes sobre las situaciones problema planteadas en cada sesión de trabajo. Los indicadores de logro que se tuvieron en cuenta fueron los siguientes:

1. Modela diversas situaciones de cambio a través de funciones y expresa dichas funciones inicialmente en palabras y luego simbólicamente, representándolas en forma gráfica, tabular y mediante expresiones algebraicas.

2. Representa y analiza funciones utilizando tablas, expresiones orales, expresiones algebraicas, ecuaciones y gráficas y hace traducciones entre estas representaciones.

3. Formula conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa y usa la calculadora para comprender dicho comportamiento.

4. Interpreta gráficos que describen diversas situaciones.

5. Analiza tablas y gráficas para descubrir patrones, hace predicciones e identifica propiedades y relaciones.

En la última sesión de trabajo se propuso el problema de hallar el rectángulo de menor perímetro entre los rectángulo de área fija (área fija–perímetro variable) y se evaluó según los indicadores expuestos. Las respuestas y actuaciones de los estudiantes fueron analizadas para ubicar a los estudiantes en un nivel de aprendizaje bajo, medio o alto.

Conclusiones

Lo que se presenta en este artículo es el inicio de un proyecto que está en ejecución y que por lo tanto tiene muchas variables por analizar, que no se pueden poner en este texto como simples afirmaciones sin haber realizado un análisis serio, pero por ahora sí se pueden mostrar algunos datos y sugerencias de lo realizado.

Se empieza por enumerar los aspectos que están pendientes por estudiar: falta realizar seguimiento a los estudiantes en el curso de Cálculo I, realizar una evaluación y mejoramiento de las actividades, analizar el impacto del uso de los archivos de GeoGebra en la comprensión de los problemas de variación y cambio en su resolución, analizar el uso que hacen los estudiantes de GeoGebra para la solución de los problemas y la influencia de éste en la comprensión y conexión de las diferentes representaciones de los conceptos estudiados y, principalmente, aportar información que ayude a la comprensión y desarrollo del pensamiento variacional, por parte de los profesores de bachillerato y primer semestre universitario.

A pesar que, en lo presentado se hace énfasis en la necesidad del conocimiento matemático, el curso de precálculo deber verse más como un acercamiento empírico e intuitivo a los conceptos e ideas fundamentales del cálculo que como un curso que pretende llenar los vacíos conceptuales de los conceptos que el estudiante no aprendió en su básica y bachillerato, no se pretende convertir lo realizado en poco tiempo en el formalismo usual que ha llevado al fracaso. Se deben aprovechar las inquietudes y preguntas de los estudiantes para abordar el aprendizaje de conceptos que son básicos para el curso de Cálculo Diferencial, se debe insistir en que los estudiantes entiendan el cambio y la variación, que identifiquen variables y las distingan de las incógnitas, que comprendan el papel de las representaciones y de sus conexiones y que entiendan la importancia de la comunicación y el razonamiento y la demostración, así como el aprovechamiento de las tecnologías como herramientas que ayudan a la exploración, conjeturación y comprobación de ideas matemáticas.

Finalmente es necesario aclarar que lo propuesto no es algo totalmente novedoso y original, desde el punto de vista teórico, dado que desde hace más de una década en Colombia se vienen insistiendo en que los profesores de básica primaria y secundaria y bachillerato pongan en funcionamiento estas ideas. Lo original de este proyecto consiste en haber conformado un equipo de trabajo con profesores de colegios y de primeros semestres de universidad e investigadores en educación matemática y administrativos, que quieren dar respuesta a una problemática y que consideran que el trabajo en equipo es más fructífero y puede dar mejores resultados, es decir, este es un proyecto que puede crear una comunidad de práctica, que quiere aportar al desarrollo de la educación matemática y a su vez ayudar al problema de la deserción y repotencia en los primeros semestres universitarios.

Referencias

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana en Matemáticas Educativa. 1* (1) 40-55.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *14*(3), 353–369. Sociedad Thales, España (42).

Carabús, O. (2002). El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión. *Producciones Científicas NOA*. Sección: Educación y Sociedad. Catamarca. Acceso: diciembre de 2006. Recuperado de http://www.editorial.unca.edu.ar/NOA2002/Aprendizaje%20Calculo%20Universidad.pdf

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2013). *La génesis y la enseñanza del cálculo: Las trampas del rigor*. México: Editorial Trillas.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales*. Colombia: autor.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2003). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Colombia: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: autor.

Moreno, L. (2012). *Conversación personal.* Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Santos-Trigo, M., Moreno, L. (2013). Sobre la construcción de un marco teórico en la resolución de problemas que incorpore el uso de herramientas computacionales. En M. T. Rojano (Ed), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas*. Editorial Trillas. México.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Em *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Blumenau.

Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática[1]

Philosophy, mathematics and education: A cultural-historical perspective on mathematics education

Filosofia, matemática e educação: uma perspectiva histórico-cultural em educação matemática

Fecha de recepción: marzo de 2013

Fecha de aceptación: julio de 2014

Gilberto Obando Zapata[2]

Luis Carlos Arboleda Aparicio[3]

Carlos Eduardo Vasco[4]

Resumen

Sobre la base de planteamientos epistemológicos derivados de la teoría de la actividad, en este artículo se argumenta en favor de una postura sobre el conocimiento matemático que posiciona los procesos individuales y sociales de su constitución como polos de una dualidad dialéctica mediada por los sistemas de prácticas socialmente compartidos. Con base en estos planteamientos, y tomando en consideración la noción de configuración epistémica, en la segunda parte se presenta una caracterización de los sistemas de práctica matemática. Como resultado de lo anterior, se presentan elementos teóricos y metodológicos que se han mostrado potentes en algunos estudios de las prácticas matemáticas de los individuos en condiciones institucionales específicas.

Palabras clave: sistemas de práctica matemática; teorías en educación Matemática; teoría de la actividad; configuración epistémica.

Abstract

In this article, based on epistemological approaches derived from activity theory, the authors argue in favor of a conception on the mathematical knowledge that positions the individual and social processes of its formation as poles of a dialectic duality mediated by socially shared practice system. Based on these approaches, and taking into consideration the notion of epistemic configuration, a characterization of mathematical

1 Artículo de investigación.

2 Universidad de Antioquia, Medellín (Colombia). Contacto: gilberto.obando@udea.edu.co

3 Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Cali (Colombia). Contacto: arboleda@univalle.edu.co

4 Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Doctorado Interinstitucional en Educación, Bogotá (Colombia). Contacto: carlosevasco@gmail.com

practice systems is proposed in the second part. As a result of these considerations, a few theoretical and methodological elements for the study of individuals' mathematical practices in specific institutional conditions are presented.

Keywords: Mathematical practice systems; theories in mathematics education, activity theory; epistemic configuration.

Resumo

Neste artigo, com base em abordagens epistemológicas derivadas da teoria da atividade, argumenta-se em favor de uma posição sobre o conhecimento matemático que posiciona os processos individuais e sociais de sua formação como polos de uma dualidade dialética mediada por sistemas práticos socialmente compartilhados. Com base nestas aproximações, e tendo em conta a noção de configuração epistêmica, a segunda parte apresenta uma caracterização dos sistemas de práticas matemáticas. Como consequência do acima apresenta elementos teóricos e metodológicos importantes para o estudo das práticas matemáticas de indivíduos em condições institucionais específicas.

Palavras-chave: sistemas de prática matemática, teorias em educação matemática, teoria da atividade, configuração epistêmica.

Introducción

La educación matemática, en su proceso de consolidación, ha transitado por diferentes caminos teóricos, algunos complementarios, otros excluyentes, pero en todo caso, fundamentados en procesos interdisciplinares que muestran su complejidad (Vasco, 1994), al punto que se considera, en el presente, un campo de investigación y de prácticas en construcción, un cruce de caminos de diferentes enfoques teóricos y metodológicos (Clements, Bishop, Keitel-Kreidt, Kilpatrick y Leung, 2013; D'Amore, 2005; Sriraman y English, 2010). Aún con el riesgo de simplificar la complejidad de la discusión, puede decirse que estos enfoques se despliegan entre el individualismo —monismo epistémico y cognitivo—, y las posturas de corte dialógico en donde lo cognitivo y epistemológico se explican como procesos eminentemente culturales.

Siendo conscientes de las tensiones generadas en este debate acerca de si lo individual o lo social es lo determinante en los procesos de constitución del conocimiento, en este artículo, sobre la base de planteamientos que provienen de la teoría de la actividad y de una filosofía de la práctica, se busca argumentar en favor de cuestiones relativas tanto al conocimiento matemático, como a su aprendizaje. Se muestra que lo individual y lo social —lo institucional— son polos de una tensión dialéctica movilizada a partir de los sistemas de prácticas históricamente constituidos. Como lo manifestó John Dewey, se trata de reconocer que la construcción de la experiencia humana no es sólo el producto de la acción mental del individuo, sino también el resultado de los procesos sociales subyacentes a las relaciones humanas:

> […] vivimos, del nacimiento hasta la muerte, en un mundo de personas y cosas, que en gran

> medida son lo que son por lo que se ha hecho y transmitido desde las actividades humanas previas. Cuando se pasa por alto este hecho, la experiencia se trata como si fuera alguna cosa exclusivamente dentro del cuerpo y la mente de un individuo. No debería ser necesario decir que la experiencia no se produce en un vacío. Hay fuentes fuera de un individuo que dan lugar a la experiencia. (Dewey, 1960, p. 43)

Estas fuentes externas provienen de la cultura en forma de sistemas de prácticas institucionalizadas que reglan las formas de acción de los individuos —acción orientada a una finalidad, acción con otros—, y que a su vez posicionan al individuo frente a esa acción conjunta —habitus, en el sentido de Bourdieu—.

Los individual y lo social del conocimiento

Una práctica —o mejor, un sistema de prácticas— es un conjunto de estructuras dinámicas objetivas y de condiciones objetivadas socialmente que orientan y limitan las formas de hacer —y de pensar— de los individuos adscritos a una institucionalidad específica, pero a la vez, en tanto la adscripción institucional de la acción del individuo no es una imitación ciega ni una repetición mecánica, es también el conjunto de posiciones subjetivas que condicionan la manera como el individuo actualiza su acción en un aquí y un ahora (Bourdieu, 1977, 2007; Bourdieu y Johnson, 1998). Estas estructuras dinámicas objetivas permiten el mínimo de acuerdos posibles para la movilización de la actividad de los individuos y generan, por tanto, una disposición de los sujetos, unas formas de sensibilidad para la orientación subjetiva y objetiva de su acción. Por su parte, el posicionamiento subjetivo es el que permite al sujeto, en el marco de las disposiciones objetivas de su campo, "ver" la ocasión para la acción, imprimir un enfoque o forma específica a su actividad, hacer de su práctica un objeto de reflexión. En el marco de esta tensión continua entre el conjunto de restricciones que un sistema de prácticas impone al individuo, y el posicionamiento subjetivo en la práctica actuada, es donde el sujeto toma distancia en un acto de creación —libertad creativa en el marco de las condiciones del campo de prácticas— que le permite reflexionar sobre su práctica, transformar su acción y construir conocimiento.

Por otro lado, lo institucional denota ese espacio simbólico —con límites más o menos definidos— de prácticas compartidas por un colectivo de individuos, los practicantes de esa comunidad, espacio donde se comparte, se negocia, se actúa con los otros —donde también se excluye—, en donde resuenan las voces presentes de muchos otros y las voces pasadas que han constituido la memoria cultural de la comunidad. El término *institucional* hace notar que cuando se despliega una práctica en, o con, las matemáticas, ésta se hace bajo unas condiciones específicas que le dan las marcas propias de un momento, época y lugar —maneras de hacer, de pensar, de relacionarse con y a través de las matemáticas, fines, medios, utilidad, entre otros—, que imprimen a la acción del individuo unas condiciones que él comparte con otros individuos. Lo institucional dispone al individuo en un conjunto de formas de acción socialmente constituidas, que le permiten *ser en* y *desde la cultura* a través de su acción

Lo individual es la inscripción del *ser* en ese capital simbólico construido por la comunidad: el individuo *es*, en tanto es reconocido por otros, en oposición a otros —lo comunal se constituye sobre la base de las subjetividades de los individuos—. El individuo se hace en la medida que se inscribe en ese conjunto de prácticas compartidas, y esa inscripción es aprendizaje. A la acción de aprender, siguiendo a Radford (2008, 2010), se le puede llamar *la subjetivación del saber*, es decir, apropiarse del legado cultural institucionalizado en la comunidad, hacer objeto aquellas estructuras idealizadas en la cultura, constituirse como individuo en el seno de una comunidad a través de la acción reflexiva con y sobre las prácticas socialmente compartidas. Por otro lado, aprender es también un proceso semiótico cultural de objetivación de ciertos saberes, un proceso reflexivo de transformación de las prácticas matemáticas que lo lleva a hacerse críticamente consciente de una forma codificada de pensar y de hacer (Radford, 2013). A través del aprendizaje, el individuo a partir de sus prácticas se posiciona en relación con los otros, a la cultura.

Objetos y conceptos matemáticos: síntesis de la acción humana

Sobre los objetos matemáticos

Restivo y Collins (2010) afirman que "los objetos con los que tratan las matemáticas modernas…son *reales* en el siguiente sentido. Ellos no son *cosas*,…, ellos son, por el contrario, las operaciones, las actividades que los matemáticos pueden realizar." (p. 11, cursivas en el original).

> Los objetos matemáticos provienen, no de la abstracción de objetos reales mediante la descripción de sus características principales, sino de un proceso de *objetivación de procedimientos*. Ellos no provienen de una realidad exterior, independiente del hombre, representando la esencia desprovista de impurezas materiales, sino que ellos formalizan la acción humana (Giusti, 2000, pp. 25-26, cursivas en el orginal).

Los objetos matemáticos antes que ser abstracciones sobre otros objetos son abstracciones sobre la acción —instrumentalmente mediada—, con y sobre tales objetos —si se quiere de nivel previo—. El objeto sintetiza un campo complejo de experiencias, es la percepción de un conjunto complejo de operaciones y relaciones que se tematizan[5] a partir de la experiencia vivida para la constitución de nuevos objetos. Para el caso de las matemáticas, los objetos sintetizan no solo las formas de relación de las personas con los otros objetos de conocimiento matemático heredados de la cultura, sino también las formas de relación con el resto del mundo.[6] Ese es el eterno ciclo creativo, en donde nuevos objetos emergen como formas idealizadas de patrones de actividad sobre los objetos culturalmente ya constituidos. Estas formas idealizadas, estos patrones de actividad se fijan en el signo que, a partir de ese momento, es la forma objetivada del objeto de conocimiento constituido.

Esta constitución de objetos es lo que Radford (2009, 2013) denomina *objetivación*, entendida ésta como un proceso social activo y creativo de construcción de sentidos y significados —para los objetos de conocimiento— en relación con las formas culturales de hacer y de pensar —conocimiento matemático—. Estos sentidos y significados descansan no sólo en el cuerpo de conocimientos estructurados formalmente —conceptos, objetos, axiomas, teoremas, entre otros—, sino también, en las acciones —gestos, técnicas, modos de hacer—, en los medios para dichas acciones —signos, instrumentos, y otros— en las formas de razonamiento y de enunciación —géneros discursivos, en términos bajtinianos— aceptadas como válidas y,

5 "Según Jean Cavaillès, quien introdujo el término para distinguir la edificación lógica de las teorías de una simple generalización, la tematización es el proceso por el cual una operación que previamente se ha realizado sobre un campo de objetos, es objeto de una segunda operación, la cual se vuelve a su vez objeto de una tercera operación, y así sucesivamente" (Arboleda, 2011, p. 33).

6 Así por ejemplo, el número en los griegos, o el número en la época moderna, es diferente no solo porque el moderno sea más abstracto que el antiguo. Lo es sobre todo porque en uno y otro momento están sintetizando diversas formas de relación con el mundo.

en general, en el conjunto de ideologías[7] que permiten ciertas formas de significación en relación con los objetos de conocimiento. Esta superestructura simbólica, como dice Radford (2008, 2009), conforma el espacio simbólico de los *medios semióticos de objetivación*, que la cultura pone a disposición de los individuos para su posicionamiento ante el mundo, para la constitución de su experiencia matemática.

Sobre los conceptos matemáticos

En palabras de Frege (1996a, 1996b), un concepto es toda predicación que se realice sobre los objetos. Así por ejemplo, al afirmar que un cuadrado es una figura geométrica con sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos iguales, la idea de igualdad en ángulos, y de igualdad en lados, expresan dos propiedades atribuibles a todo aquello que sea cuadrado, o a la inversa, toda figura geométrica que haga verdaderas estas esta proposición —cumplir al tiempo las dos propiedades, los dos conceptos— es el objeto cuadrado. Así pues, los conceptos se expresan, toman forma, se constituyen a través de la palabra.

Por otra parte, y siguiendo los planteamientos de Vygotsky (1993, 1994), detrás del concepto no sólo está la conexión del objeto con su significado, sino que, en ese proceso de elaboración del significado, la palabra que designa el objeto sintetiza el conjunto de operaciones mentales que permiten la abstracción de los atributos del objeto que son resaltados en un determinado concepto. Dicho de otra manera, el proceso de formación de un concepto implica un proceso de generalización de atributos, pero sobre todo, la síntesis de dichos atributos en una nueva unidad, el concepto formado.[8] Finalmente, los conceptos matemáticos, en tanto conceptos científicos, deben ser considerados como pertenecientes a una red sistémica, esto es, que cada nuevo concepto debe posicionarse en el marco de una red compleja de relaciones con otros conceptos relativos al mismo y a otros objetos , lo cual permite relacionar diferentes objetos entre sí.

Actividad orientada: objetivación-subjetivación del ser

En una primera aproximación se puede entender la *actividad* como una categoría filosófica que "refleja la relación del sujeto humano como ser social hacia la realidad externa, relación mediatizada por el proceso de transformación y cambio de esta realidad" (Davidov, 1988, p. 11). Esta categoría se erige como "…la abstracción teórica de toda práctica humana universal, que tiene un carácter histórico-social…" (Davidov, 1988, p. 27). Se puede entonces entender la actividad como el conjunto de acciones desarrolladas por los seres humanos, en contextos particulares de práctica, socialmente orientada a un fin (*intencional*) (Leontiev, 1978; Ricoeur, 2001). Esta orientación intencional es regulada por la adscripción a un sistema de prácticas en un campo de experiencias determinado. La práctica *objetiviza* la acción del individuo, la orienta hacia objetos específicos de su campo de experiencias.

La actividad es un proceso colectivo en el cual la *inter-acción* es la base para la construcción de sentidos y significados, es decir, la construcción de una conciencia individual —que no es una conciencia solipsista— en el marco de los procesos sociales

7 Para Bajtín, la ideología es conciencia social constituida por la interiorización del signo, es decir, la ideología es un "sistema de ideas socialmente determinado, como sistema de valores y puntos de vista" (Silvestri y Blanck, 1993, p. 56).

8 Es importante resaltar que desde la perspectiva de Vygotsky (1993) generalizar es algo más que identificar los rasgos comunes a una clase de objetos. Ésta es ante todo el proceso mediante el cual esos atributos identificados como comunes se constituyen, se sintetizan en una nueva unidad. Con sus palabras, una cosa es identificar todos los atributos comunes a una clase objetos y otra la designación de dichos atributos a través de una palabra, pues este acto de designación crea una etiqueta que los constituye efectivamente en una unidad.

subyacentes, en tanto la acción del individuo en el proceso de objetivación está determinada por los agentes, instituciones o instrumentos del campo —ser con otros—. Esto muestra el carácter intersubjetivo de la actividad, en función del carácter re-flexivo de las acciones humanas. La *re-flexión*, siguiendo a Radford (2006, 2008), es la dialéctica entre una realidad —constituida histórica y culturalmente— y un sujeto que a través de sus acciones refracta y modifica dicha realidad, pero que además, se vuelve sobre sí mismo para construir un cambio de estructura en su existencia. La reflexión es la forma por medio de la cual el individuo refracta sobre sí mismo, a través de su acción, el conjunto de instrumentos que la cultura pone a su disposición. Esto significa que la acción del individuo no es pasiva frente a los instrumentos sino que, en su acción reflexiva, los transforma, los re-significa. Esta autonomía del sujeto en el campo, en términos de conciencia o capacidad reflexiva sobre su propia práctica, es lo que puede llamarse la *subjetividad*: "La subjetividad aparece como forma de participación y contribución a la práctica social, de cambio de avance, y así, como la forma en que las realizaciones prácticas de los humanos son conducidas hacia sí mismos, hacia otras personas, hacia su mundo" (Stetsenko, 2005, p. 82). Pertenecen al dominio de la subjetividad los ideales, conductas y valores a los que apela el sujeto para darle sentido a su práctica (ver por ejemplo, Detlefsen, 2005, sobre los ideales en las matemáticas en el siglo XIX). La subjetivación es entonces el acto por medio del cual el individuo se constituye como ser, es la manera como en función de su acción reflexiva se posiciona frente al mundo. Es la manera como el individuo regula su participación en los entornos de la actividad práctica social, y por ende, la forma como habita las instituciones, las hace vivir en la revisión y transformación continua de dichos sistemas de prácticas (Bourdieu, 2007).

Lo Histórico–Cultural:[9] fundamentos semiótico-cognitivos

De acuerdo con lo antes expuesto, el desarrollo del individuo en función de la experiencia humana debe comprenderse como un proceso mediado culturalmente, institucionalmente situado en contextos específicos de práctica —las acciones de los individuos y el contexto para la acción forman una unidad inseparable—, y cognitivamente distribuido —en los otros, los instrumentos, los entornos sociales y naturales— (Cole y Wertsch, 1996).

Mediación y cultura: construcción semiótica de la conciencia

Vygotsky introduce elementos de orden cultural en los mecanismos explicativos de los procesos del desarrollo humano. Estos procesos son ser estudiados en dos grupos de fenómenos, totalmente interconectados, aunque perfectamente diferenciados. De un lado, en relación con el dominio de los medios externos de desarrollo cultural: el lenguaje, la escritura, el cálculo, el dibujo, entre otros. Por otro lado, el de las *funciones psíquicas superiores*, tales como la percepción, la atención voluntaria, la memoria lógica, la formación de conceptos, el lenguaje oral, el lenguaje escrito, y demás. El estudio de estos dos grupos de fenómenos pone de manifiesto la tesis central de la teoría vygotskiana, a saber, la conciencia, la experiencia humana, como expresión de su conducta, tiene naturaleza doble: se desarrolla en el plano de la cultura, de sucesos históricamente

9 Diversos autores (Cole, 1999a, 1999b; Cole y Wertsch, 1996; Daniels, 2003, 2008; Leave, 1991; Wertsch, 1988) proponen llamar histórico-críticos, o histórico-culturales, a los enfoques que, sobre la base de los aportes de Vygotsky, Leontiev, Luria, entre otros, buscan una comprensión del desarrollo humano en función de reconocer y estructurar las conexiones íntimas entre la acción humana y el entorno dentro del cual se desarrollan dichas acciones, conexiones que se elaboran sobre la base de la mediación de los instrumentos culturales, los cuales son por naturaleza, institucionalmente situados e históricamente constituidos.

constituidos, y en el plano interno de la construcción de los esquemas cognitivos. Es en esto que se basa el principio de *internalización*: la reconstrucción interna, por parte del individuo, de los planos sociales en las funciones psicológicas superiores.[10]

El signo es el medio a través del cual se realiza este proceso en tanto que, por un lado, todo signo es una construcción cultural, y por otro, la acción humana a través del signo le permite al individuo apropiarse de ese legado cultural presente en él —formas de hacer, operaciones, y de pensar cristalizadas en el signo—, y al hacer esto, el individuo constituye su conciencia, su capacidad crítica frente a esa realidad exterior, posicionándolo frente a su hacer y su saber. Así, los signos, a través de la actividad de los individuos, permiten reconstruir para sí lo que la humanidad ha construido en la cultura.[11] Es en este sentido que Vygotsky refiere la *función instrumental de signo*, esto es, en relación con algún tipo de operación psicológica —memorizar, recordar, informar, elegir, calcular, entre otras—, los signos son los instrumentos de la actividad humana —es este caso, actividad psicológica—, los medios para la ejecución de las acciones cognitivas necesarias en los procesos de constitución de la conciencia como fenómeno cultural.

Actividad y mediación: acción instrumentada, acción con el otro

Así pues, el concepto de *actividad* emerge, en la teoría vygotskiana, como un principio explicativo que permite comprender cómo la cultura permea el proceso de constitución de la conciencia humana. Para Vygotsky, es la "actividad humana concreta histórica la que constituye el generador detrás de los fenómenos de la conciencia" (Kozulin, 2003, p. 102). El desarrollo se debe considerar como resultado de las acciones culturalmente significativas y no sólo como un fenómeno biológico.

> ...la cultura origina formas especiales de conducta, modifica la actividad de las funciones psíquicas, edifica nuevos niveles en el sistema de comportamiento humano del desarrollo... En el proceso de desarrollo histórico, el hombre social modifica los modos y procedimientos de su conducta, transforma sus inclinaciones naturales y funciones, elabora y crea nuevas formas de comportamiento específicamente culturales (Vygotsky, 1995, p. 34).

Cultura y desarrollo se co-determinan. Cuando el individuo actúa sobre su entorno para transformarlo en busca de bienestar, ese medio transformado genera nuevas condiciones para el desarrollo del individuo (Hegedus y Moreno-Armella, 2011).

Dialéctica sujeto-objeto: acción mediada instrumentalmente

La idea de mediación —instrumental— de Vygotsky, o como lo han llamado los teóricos actuales, la acción mediada, es base fundamental para dar cuenta del carácter eminentemente situado —histórica y culturalmente— de la acción del individuo (figura 1).

10 Internalización no es una simple copia de la realidad exterior en la mente de las personas, es un proceso reconstructivo en el que la constitución de esa realidad exterior en los planos cognitivos, modifica la cognición misma del individuo

11 De esta manera el signo no es una marca, una huella dejada sobre un medio soporte, una ficha de un juego formal carente de significados —como lo pretendía el formalismo matemático—, sino que el signo lo es en tanto que en relación con esa marca, a esa huella, a ese gesto – como diría Radford (2006, 2008, 2013)– se han cristalizado un conjunto de significados, de patrones de actividad de los sujetos, haciendo entonces de este signo una construcción cultural, con capacidad para orientar la acción de los individuos. Se puede decir que la marca, la huella, el gesto son cada uno de ellos portadores de unas formas de acción, de unos significados del objeto, y por ende, nos permiten, por así decirlo, tener una impresión sensorial del objeto en sí mismo. La multiplicidad de estas miradas sobre el objeto, de formas de acción con el objeto, de significados para el objeto, permiten nuevas elaboraciones sobre el objeto en sí mismo, como especies de síntesis que permiten constituir nuevos niveles de relación sobre tal multiplicidad.

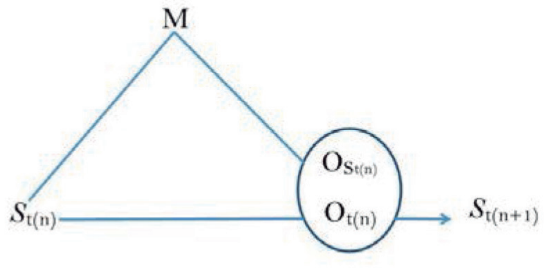


Figura 1. Modelo de la estructura de mediación en la perspectiva vygotskiana de la acción mediada

Fuente: elaboración propia a partir de R. Engeström y Kuutti, 2006, p. 46.

En este modelo, *S* representa un sujeto, *M* los instrumentos —artefactos, signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos, explicaciones de otros, y demás— y *O* el *objeto/motivo* de la actividad.[12] La línea $S_{t(n)}O$ representa formas de relación natural entre el sujeto y el *objeto/motivo* —sin mediación—, mientras que la línea $S_{t(n)}MO$, las interacciones entre el sujeto y el *objeto/motivo* mediadas instrumentalmente. El subíndice "t(n)" bajo la letra "*S*" indica un estado específico en un tiempo t dado, de modo que $S_{t(n)}$ será el estado del conocimiento del sujeto *S* en un tiempo t(n) dado, y $OS_{t(n)}$ es el *objeto/motivo* representado por el sujeto, en el tiempo t(n), vía los medios de mediación, mientras que $O_{t(n)}$ es el *objeto/motivo* en sí mismo en dicho tiempo t(n) —por lo general, el objeto, como construcción social, no coincide con la representación que el sujeto se hace de dicho objeto, la cual depende de las formas de mediación en el sujeto—. Finalmente, $S_{t(n+1)}$ es el estado de conocimiento del sujeto en un tiempo posterior a su acción sobre el objeto/motivo *O*.

A esta perspectiva vygotskiana se le han criticado aspectos como: a) su idea de mediación semiótica, que separa dos procesos de mediación —interna y externa— a través de dos tipos de instrumentos —signos y artefactos— y pone el peso de la mediación cognitiva sobre los signos, lo cual deja por fuera toda una serie de acciones e instrumentos para la acción que también inciden en la formación misma de la conciencia —en tanto construcciones culturales—, b) no mostrar de manera explícita otras formas de mediación entre en el sujeto y el objeto, no presente en los signos o artefactos como instrumentos de mediación, como son las formas de acción social. Parafraseando a Engeström (1999), el modelo triangular da la impresión de que el sujeto actúa en solitario en relación con el objeto/motivo de su actividad, y no muestra las interacciones de los otros con ese mismo objeto/motivo, con el sujeto mismo. Dicho de otra forma, no muestra que la acción del sujeto está inmersa en un complejo sistema de actividades, en el cual las re-presentaciones del sujeto sobre su objeto/motivo de la actividad hacen parte de un sistema estructurado de percepciones y cogniciones pertinentes en el marco de las condiciones institucionales que delimitan las prácticas de los individuos.

Dialéctica sujeto-objeto: acción mediada socialmente

Como se expresó, la actividad se define en relación *con el conjunto de acciones socialmente dirigidas (orientadas) con el objetivo de alcanzar un fin*. Debido a esta orientación hacia una finalidad, la actividad es de naturaleza social, y es la vía por la que el humano ejerce control sobre sí mismo, y sobre los demás. La actividad es entonces un complejo de relaciones entre las personas en el curso de su acción objetiva y en el marco de sistemas de prácticas relativas a un mismo campo. La actividad tiene como principales elementos constitutivos el *objeto/motivo*, las *acciones* y las *operaciones*.

1 Siguiendo a Roth y Radford (2011) se usa la expresión objeto/motivo, y no simplemente objeto, para referir el objeto de la actividad como una construcción cultural que orienta, que canaliza la acción del individuo sobre los objetos del mundo, y de esta manera, la palabra objeto se usa en el sentido usual: aquello que en la dualidad sujeto-objeto, denota la realidad objetiva, lo que se antepone al sujeto, si se quiere, las cosas existentes. Sobre la necesidad de esta doble distinción ver Roth & Radford (2011) o Kaptelinin (2005).

El objeto/motivo de la actividad, aquello hacia lo que se orientan objetivamente las acciones humanas, tiene una doble finalidad: externamente, orienta y dirige el curso mismo de la actividad; e internamente, es representación mental en el sujeto, lo cual permite al ser humano reflexionar sobre la actividad misma y transformarla (Kaptelinin, 2005; Leontiev, 1978). De esta manera, la orientación de la actividad por el objeto/motivo permite la transformación mutua del uno sobre el otro —sujeto y objeto—, en una doble dimensión que proyecta el objeto sobre la mente de los sujetos, pero que a la vez proyecta la mente de los individuos sobre los objetos de la realidad objetiva (Kaptelinin, 2005). Es decir, la actividad, en la dialéctica entre el acto físico y la representación mental, hace posible la anticipación de la acción —por parte de los sujetos actuantes— a partir de un proceso estructurado de planificación.

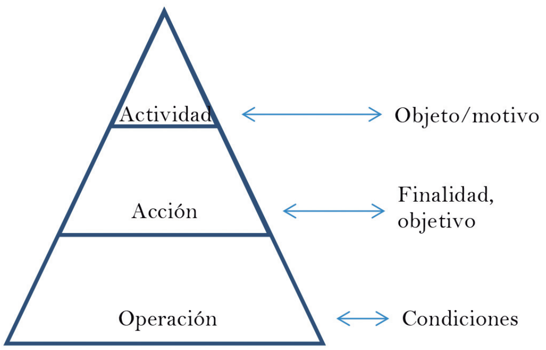


Figura 2. Estructura de la actividad humana según

Fuente: elaboración propia

Las *acciones* son el conjunto de procesos por medio de los cuales los individuos planifican —representan mentalmente dice Leontiev— un objetivo, y cuyo fruto es alcanzar dicha finalidad objetiva. De esta manera, acciones y finalidades están estrechamente unidas. Las finalidades se dan arbitrariamente en el desarrollo de circunstancias objetivas. Su delimitación y toma de conciencia no es ni automática ni instantánea, sino un proceso de prueba a través de la acción.

Pero las acciones, además de la intención, comportan el cómo lograrlas, es decir, el conjunto de procesos a partir de los cuales se hace concreta la acción. Leontiev llamó a estos procesos las *operaciones* de la actividad. Las operaciones no están determinadas por la acción en sí misma sino por las condiciones (*objetivo-objeto*) para ser realizada.

Autores contemporáneos (Cole, 1999a; R. Engeström y Kuutti, 2006; Y. Engeström, 1999, 2009) encuentran en los planteamientos de Leontiev tres elementos nuevos en la noción de mediación: la división social del trabajo, las relaciones con la comunidad, y las reglas o convenciones para la acción. Se amplía el horizonte de la idea de mediación más allá de mediación instrumental, al incluir elementos que permiten comprender la acción del sujeto en el marco de formas sociales más complejas (figura 3).

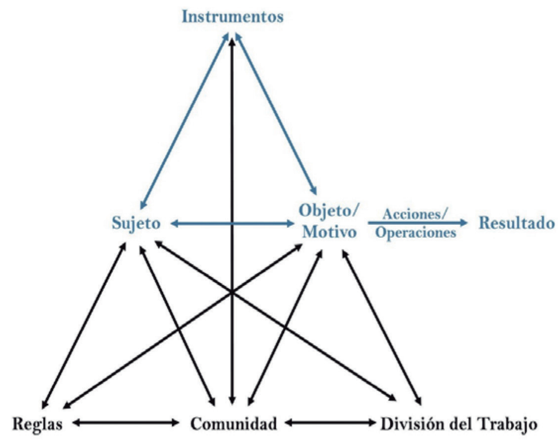


Figura 3. Modelo de la estructura de las formas de mediación en la teoría de la actividad de Leontiev

Fuente: elaboración propia

En este modelo, *la división social del trabajo* implica que en el curso de la actividad, por lo general, lo que hace un individuo sea sólamente parte de un conjunto de acciones con otros, y por lo tanto, la distribución de las tareas delimita las relaciones de poder y los posicionamientos de unos frente a otros. La *comunidad* permite comprender los procesos de colaboración entre los diferentes individuos involucrados en la actividad —sistemas de prácticas que permiten las interacciones entre los individuos en un marco institucional determinado—. Las *reglas* se refieren a ese conjunto de normas, explícitas e implícitas que regulan las acciones de los individuos en el seno de una comunidad —códigos de comportamiento, normas que orientan la acción, entre otros—.

Este nuevo modelo expande el triángulo inicial para abarcar las dimensiones sociales y colaborativas de la actividad —reglas, comunidad—, al igual que incluir las relaciones de poder que se dan en las mismas —división social del trabajo—. Las flechas entrantes y salientes de cada uno de los puntos, indican que se trata de un modelo sistémico —aunque algunas de las interacciones sean difíciles de identificar— lo que indica que cada nodo media entre los demás, y todos conjuntamente en la relación *sujeto–objeto/motivo* de la actividad. Igualmente, el sujeto tiene que ser visto como un individuo en comunidad y, por tanto, la acción que conecta el *objeto/motivo* de la actividad con el resultado es en realidad un cúmulo de acciones que marchan en paralelo para poder llegar a la meta.[13]

Acción instrumentada: cognición distribuida

Como se puede concluir de las secciones anteriores, la actividad práctica orientada a un fin es objeto de diferentes formas de mediación, una de las cuales se da a través de los instrumentos con los cuales se configura la acción. Los instrumentos, a la vez que síntesis sociales de los procesos de inter-acción, son mediadores en la forma como los individuos se apropian de dichas construcciones sociales —entre ellas, el conocimiento—. La acción del humano a través de instrumentos la actividad— comporta, para ese individuo, apropiarse de la experiencia de la práctica social, la cual, hecha conciencia, se constituye en conocimiento (Leontiev, 1978).

Para Leontiev, el instrumento es a la vez el objeto con el que se realiza la acción laboral, pero también, el objeto social que sintetiza unos modos de acción socialmente elaborados. El instrumento es el conjunto complejo de métodos y operaciones socialmente elaboradas y cristalizadas en él.[14] Es una construcción social —material y simbólica—, y por tanto una abstracción, una generalización de las acciones culturales cristalizadas en su estructura (Leontiev, 1978).

Alex Kozulin retoma la noción de instrumento psicológico de Vygotsky, y lo redefine alrededor de conceptos más amplios: signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos. En sus palabras, "Los instrumentos psicológicos son los recursos simbólicos que ayudan a los individuos a dominar sus propias funciones psicológicas 'naturales'..." (Kozulin, 2000, p. 15). En ese sentido, los instrumentos no son sólo prótesis que amplifican las capacidades humanas para hacer cosas. Son verdaderas extensiones de su cuerpo, de su mente, que llevan la cognición humana más allá del cuerpo, distribuyéndola en los instrumentos para la acción, en los otros con los que se actúa. Decía Dewey que cuando el niño aprende a hablar, no solo tiene nuevas necesidades y deseos, también se le abren nuevas posibilidades para un saber subsiguiente (Dewey, 1960).

De esta manera, la construcción del instrumento que realiza el ser humano se hace indisociable del

13 En los últimos años la teoría de actividad ha sufrido cambios sobre la base de reconceptualizar algunas de las nociones clásicas. Por ejemplo, el *objeto/motivo de la actividad se ha interpretado como un campo de posibilidades, continuamente abierto a la transformación, y por ende, con potencial transformador del sujeto. Para detalles ver* Y. Engeström (2009) o Y. Engeström y Sanino (2010)

14 En este sentido, instrumento es diferente de artefacto, y esta diferenciación está en la línea de los planteamientos de Rabardel, Trouche, entre otros (Gueudet y Trouche, 2012; Rabardel, 2003, 2005; Rabardel y Bourmaud, 2005; Trouche, 2002)

el desarrollo mismo de las acciones prácticas humanas, en tanto toda acción es mediada por el uso de un instrumento (físico o simbólico). El individuo, en el curso de su actividad, *co-actúa* con el instrumento, y en el desarrollo de esta *co-acción*, se modifican mutuamente (Hegedus y Moreno-Armella, 2010; Moreno-Armella y Hegedus, 2009). Este proceso de co-acción determina lo que se ha denominado la génesis instrumental, entendida en un doble movimiento: el primero, en relación con el proceso mediante el cual los instrumentos son incorporados al sistema de actividades de los individuos dando forma a su acción, y donde la apropiación del instrumento es contextualmente situada dentro de, y con respecto a, un determinado sistema de prácticas (instrumentación), y el segundo, en función de la manera como la evolución y desarrollo de las formas de acción instrumentada de los individuos, y las condiciones de entorno dentro de las cuales se desarrollan tales acciones, afectan al instrumento mismo (instrumentalización).[15]

Sistemas de práctica matemática

Configuración epistémica

Como se expresó en las secciones anteriores, toda práctica, desde el punto de vista institucional, descansa sobre un conjunto de valores y visiones que demarcan las fronteras dentro de las cuales se desarrollan los episodios particulares de la investigación matemática en épocas y lugares específicos. Estos valores y visiones toman forma en relación con las técnicas disponibles, a los tópicos de investigación y problemas en consideración, a las orientaciones heurísticas, entre otras; propias o características de una comunidad en el momento particular en el que desarrolla su actividad matemática. Este conjunto de recursos institucionales —físicos e intelecutales— constituyen lo que Moritz Eppe (2004) denominó una *configuración epistémica*, esto es, la episteme que hace posible la existencia de prácticas matemáticas determinadas: que reconocen su campo de problemas de una determinada manera, reconocen ciertas técnicas o formas de heurísticas y no otras, y reconocen formas de razonar o enunciar específicas, entre otras.

Godino y colaboradores (Godino y Font, 2007) introducen la noción de *configuración epistémica* de manera similar, con la ventaja de aplicar sus análisis no al ámbito de la investigación matemática, sino a los fenómenos de constitución de conocimiento matemático en contextos escolares. En su perspectiva, una configuración epistémica refiere a la estructura de objetos y sus respectivos sistemas de significados, al conjunto de elementos inmediatos al entorno del aula de clase, sus formas de organización, sus formas de significación. De esta forma, la atención se fija en el proceso vivido por el saber escolar —su tiempo y espacio—, en sus sentidos y significados, y para los fines de un análisis micro-didáctico detallado, el estudio de las configuraciones epistémicas centra la mirada en el cómo se constituyen los sistemas de práctica matemática en el aula de clase, en la forma como se estructuran los sentidos y significados de los elementos que la constituyen y que se construyen a partir de la práctica misma, y por ende, de los sentidos y significados para los objetos de conocimiento matemático desde el punto de vista del saber institucionalizado, para diferenciarlo del conocimiento como fue apropiado por el alumno.

Práctica matemática

Las prácticas son siempre realizadas por personas, y por tanto, al decir "práctica matemática" se están

15 Esta manera de presentar la génesis instrumental difiere de los planteamientos de autores como Trouche y Rabardel entre otros, que siguen el denominado enfoque instrumental (Gueudet y Trouche, 2012; Rabardel, 2003, 2005; Rabardel y Bourmaud, 2005; Trouche, 2002).

refiriendo cierta forma de acción de los individuos, en sus relaciones entre sí, y con el medio, a través de los procesos de objetivación tanto de la cantidad y la forma —por ejemplo, medir, contar, comprar, vender, intercambiar, construir, fabricar, estimar, describir, localizar—, como de la variación de una u otra —movimiento, cambio, comparación, transformación, y otras—.

Los medios para la acción, ese legado cultural a partir del cual se despliega cualquier práctica matemática, se pueden caracterizar a partir de los siguientes elementos: los objetos de conocimientos con —y sobre los cuales se actúa— los conceptos que se enuncian sobre los mismos, los instrumentos para la acción, las técnicas que permiten tales instrumentos, los problemas, en tanto metas que orientan la acción, las formas de discursividad que permiten poner el hacer en el lenguaje —formas de decir, de escribir, de comunicar—, y finalmente el conjunto de visiones metamatemáticas que permiten la toma de decisiones sobre el hacer —cosmovisiones, valoraciones sobre las matemáticas, fines de las matemáticas, posturas filosófica y ontológicas—.[16]

Los elementos antes enunciados no sólo constituyen la práctica sino que, en el curso de la actividad matemática, son emergentes de la práctica misma en la medida que se forman, se transforman, se sustituyen (Kitcher, 1984). En este sentido, dichos elementos no son estáticos sino que cambian en el tiempo, y este cambio determina la constitución de nuevo conocimiento matemático. El cambio de las prácticas se ve en la medida que, o nuevas técnicas sustituyen parcial o totalmente las anteriores, o bien nuevos objetos emergen para brindar una mejor comprensión de las técnicas utilizadas, y por ende, una mejor justificación de las mismas. Pero a la vez, este proceso permite la emergencia de nuevos instrumentos para la acción, y el ciclo continua.

Los problemas por resolver

Los problemas por resolver son esos campos válidos de indagación, y de cuyo tratamiento emerge el conocimiento matemático objeto de estudio. El análisis de los problemas en términos de las prácticas matemáticas es importante en tanto permite comprender cómo en las situaciones[17] que éstos propician se articulan los objetos de conocimiento que problematizan, las técnicas e instrumentos disponibles para su tratamiento y, en general, los conceptos que se movilizan en los discursos que se constituyen en relación con la solución de tales problemas.

Para dar cuenta de lo anterior, y apoyándose en Rabardel y Bourmaud (2005), el análisis de los problemas al interior de una práctica se puede hacer desde dos perspectivas: 1) *tipos de situaciones*, referidas al conjunto de problemas agrupados en función de características lo suficientemente cercanas para que la actividad de los sujetos se desarrolle con cierto nivel de estabilidad; y 2) *familias de actividad*, para referir a la a la finalidad de la acción común, es decir, en función de las prácticas —matemáticas— que despliegan los individuos al enfrentar los problemas. De esta manera se pueden diferenciar los aspectos propiamente estructurales del problema por resolver, de los relacionados con las formas de actuación del individuo al enfrentarse con el mismo. Los problemas se pueden

16 Esta idea de práctica matemática, en esencia, recoge los elementos básicos descritos por Kitcher (1984), Ferreirós (2010) Godino, Batanero, y Font (2008), Godino y Font (2007), D'Amore y Godino (2007) ampliando algunos de los sentidos propuestos por estos autores, e introduciendo nuevos elementos de análisis.

17 La situación se entiende como ese espacio emergente de la interacción de un grupo de individuos —o un individuo— con el problema que se tiene en frente —que orienta la actividad de los sujetos— al actualizar en sus prácticas todo el acervo cultural del que disponen para enfrentar el problema en busca de la solución, y por ende, constituir un posicionamiento sobre el mismo.

mirar en función de dos principios que responden a su estructura, y a la forma de la actividad de los individuos.

La estructura apunta a identificar en los problemas la naturaleza de las cantidades o las formas involucradas —continuas o discretas—, las representaciones y las cuantificaciones de las mismas —procesos de medición, simbolización, graficación, entre otras—, las acciones sobre estas —agregar-desagregar, agrandar-achicar, transformar, y otras—, las relaciones entre ellas —comparación por cociente o por diferencia, covariación—, y su status lógico —lo dado o lo desconocido—. Por su parte las familias de actividad apuntan a identificar la estructura de la acción que el sujeto configura en función de los instrumentos disponibles. Por ejemplo, calcular, explicar, justificar, formular, representar, modelar, aplicar (Giaquinto, 2005).

Formas de discursividad

Desde una perspectiva bajtiniana, las prácticas se hacen signo a través del lenguaje. Pero a la inversa, es el lenguaje un mecanismo fundamental para la constitución de tales prácticas. En este sentido, el lenguaje cumple una doble función, es el instrumento fundamental en la construcción de la conciencia humana, y a la vez, determina el desarrollo social del ser humano, "Con la ayuda del lenguaje se crean y se forman los sistemas ideológicos, la ciencia, el arte, la moral, el derecho, y al mismo tiempo crea y forma la conciencia de cada hombre" (Bajtín, 1993, p. 242). Todo sistema de prácticas está en estrecha conexión con el uso social de la lengua.

A cada forma de práctica se corresponden formas específicas de uso, o mejor, esferas distintas del uso de la lengua. Estas esferas de uso de la lengua, estas prácticas sociales del uso, toman forma a través del enunciado. La unidad básica, el enunciado —que fusiona contenido temático, estilo y construcción composicional— está indisolublemente unido a una esfera de comunicación: "todo enunciado tomado aisladamente es, por supuesto, individual, pero cada esfera dada del uso de la lengua elabora sus tipos relativamente estables de enunciados, a los que denominaremos géneros discursivos" (Bajtin, 1990, p. 248). Así, "los géneros discursivos son especies de esquemas […] que orientan la construcción de formas típicas de enunciados donde se dibujan, se *muestran simulacros del mundo* relacionados con los grandes dominios de la actividad" (Martínez, 2005, p. 14, cursivas del original). El género discursivo es una especie de "práctica social discursiva, mediada por un contrato de comunicación e intercambio verbal" (Calderón, 2003) entre dos interlocutores ligados por una situación de comunicación específica.

Finalmente, los actos enunciativos propios de las prácticas sociales y humanas tienen sentido en el marco del desarrollo de procesos discursivos:

> La discursividad puede entenderse como la característica particular que define la comunicación social como actividad verbal. [lo cual significa que] 1) Se trata de una actividad humana de tipo semiótico y de naturaleza verbal… 2) Esta actividad permite la configuración de sujetos discursivos; … 3) La actividad discursiva es realizada en la cotidianidad por sujetos de habla o enunciadores, quienes desarrollan e interiorizan su experiencia discursiva en los procesos de constante interacción con los enunciados individuales ajenos (Calderón, 2003).

De esta forma, el sujeto asume un papel dialógico ante los demás, es la suma de la multitud de voces —pasadas y presentes—, y su voz es la réplica a otras voces.

La elaboración de formas discursivas es fundamental en el desarrollo de las matemáticas. A través de éstas el lenguaje se extiende más allá de los límites de la acción física, como se puede ver, por ejemplo, en la teoría de los números reales. El objeto número real, como objeto abstracto, no estaba en los griegos; se desarrolló a través de un lenguaje que hizo posible la extensión de las operaciones a aquellos ámbitos que superaban los límites de lo físico —los números complejos, los irracionales, entre otros—. Se puede hablar entonces de una doble funcionalidad del lenguaje en la actividad matemática: es el vehículo para realizar las operaciones matemáticas pero también el medio para expresarlas (Kitcher, 1984).

Instrumentos y procedimientos

Como se dijo, los instrumentos son ese conjunto de recursos simbólicos —signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos, artefactos, software, gestos— que constituyen los medios para la acción matemática. Además, los instrumentos que median las prácticas matemáticas en el aula de clase, dado que cristalizan en su estructura ciertas formas de relación que pueden ser puestas en analogía con formas de relación entre conceptos y objetos matemáticos, en lo que se ha llamado *el campo simbólico del artefacto*, son portadores de conocimiento y por ende, tienen capacidad de generar procesos de aprendizaje cuando son usados en el curso de la actividad de las personas. Igualmente, este potencial del instrumento para incorporar conocimiento es lo que le da la posibilidad de estar en permanente desarrollo —incorporando las modificaciones que le hacen los individuos a través de su uso—, generando lo que Moreno y Hegedus (2010; 2009) han denominado la zona de desarrollo próximo del instrumento, refiriéndose a ese potencial de uso del instrumento, que lo pone, en la relación mediadora entre el individuo y su actividad, más allá de los fines para los que ha sido utilizado.

Objetos y conceptos

Como se mostró ampliamente en las secciones anteriores, objetos y conceptos tienen una base firme en la acciones de individuo y por tanto, en su constitución, un punto crucial lo determinan, por un lado, el tipo de problemas al que se enfrentan las personas, a los cuales se orienta su práctica y, por otro, los instrumentos disponibles para la acción. En particular, el uso funcional de los signos juega un papel central en la formación de objetos y conceptos, a través de ellos se dispone de los medios para dirigir objetivamente la acción, analizar y destacar atributos, abstraer y sintetizar.

A manera de síntesis

En suma, al proponer la dialéctica entre lo individual y lo social —dialéctica mediada por las prácticas sociales— en palabras de Cobb (2006), se trata es de investigar la *persona-individual-en-la-práctica-cultural*. Se plantea entonces no una separación entre los aspectos individuales o sociales en la construcción de conocimiento, sino que, por el contrario, se muestra que lo social y lo individual son como las dos caras de una misma moneda, lo individual y lo social se constituyen uno al otro dialécticamente.

La teoría de la actividad entrega entonces una serie de instrumentos para la comprensión de esa dialéctica. La noción de *mediación instrumental*, o mejor aún, de *acción mediada instrumentalmente*, entendiendo el instrumento en el sentido amplio de los *medios culturales de objetivación*, es un lente potente para comprender la manera en que la cultura media en los procesos de constitución del conocimiento y de la conciencia humana. De manera similar, la acción del sujeto en el marco de la actividad colectiva, la orientación social de la acción sobre un objetivo, la planeación de la acción y la ejecución de la misma, y el uso de los instrumentos para la acción, permiten comprender cómo los procesos sociales se constituyen en procesos mentales. Por otro lado, la *subjetivación* del ser, presente en los mecanismos de regulación de la participación —en las prácticas sociales— por parte del sujeto, en su reflexión sobre la acción, en su orientación hacia el objeto de la actividad produciendo nuevos objetos/motivos para la acción, creando o transformando los instrumentos, produciendo nuevos sentidos y significados para el sistema de prácticas, muestran el retorno del sujeto sobre el mundo social y cultural, "la subjetividad humana, al retornar sobre el mundo a través de la actividad, inevitablemente cambia al mundo, posiciona al sujeto en sí mismo frente a la realidad material de las prácticas humanas en sus formas objetivas reificadas [en los instrumentos y los objetos de la actividad]" (Stetsenko, 2005, p. 83).

Al aplicar estas ideas sobre la actividad es necesario preguntarse, para una práctica determinada, cuáles son sus instrumentos y cuáles las operaciones propias de dicha actividad. Se puede proponer, al menos para las prácticas matemáticas, que la actividad consiste en acciones orientadas a la solución de problemas. Los instrumentos son fundamentalmente de orden semiótico: el lenguaje natural, las notaciones algebraicas, las gráficas cartesianas, las figuras geométricas, entre otras. Por su parte, las operaciones se constituyen a partir de todos los procesos, formas de hacer matemáticas, construidos históricamente por la humanidad, que se han cristalizado en los diferentes sistemas de representación que se usan en las matemáticas —los registros algebraicos, las representaciones cartesianas, las figuras geométricas, y otros—. Los procesos de instrumentación e instrumentalización —el movimiento continuo entre lo individual y lo social—, muestran la manera como avanza el conocimiento matemático —es el caso, por ejemplo, de la emergencia de los procesos algebraicos sobre los aritméticos, lo cual implica una profunda transformación en la actividad matemática de las personas—.

Tal noción de práctica matemática no es estática, sino que es institucionalmente situada, semióticamente mediada, históricamente constituida, a la vez que dinámicamente transformada en el tiempo. El carácter institucional de la práctica se evidencia en los tipos de restricciones sobre el lenguaje, sobre las técnicas, que el campo impone a los individuos en el seno de la comunidad —es el caso de los intuicionistas frente a los formalistas en los albores del siglo XX—. El carácter individual se evidencia en el posicionamiento del individuo frente al sistema de prácticas —en la acción reflexiva sobre su práctica— y por ende en los procesos creativos del individuo —libertad creativa en el marco de las reglas definidas por el campo—. En ese movimiento individual-social, las prácticas se transforman, emergen nuevas técnicas, nuevos objetos, nuevos conceptos, nuevos discurso, en fin, nuevas condiciones para acción práctica.

En este marco, el aprendizaje debe ser entendido como un proceso de transformación constante del individuo —transformación de las prácticas—, en el contexto de un ordenamiento —disposición— delimitado por los sistemas de prácticas socialmente objetivados que orientan la actividad de los sujetos, y de un posicionamiento frente a dichos sistemas de actividad determinado por la subjetividad del ser.

Agradecimientos

Este artículo es derivado de la tesis doctoral del primer autor titulada *Sistemas de prácticas asociados a las razones, las proporciones y la proporcionalidad: el caso de las configuraciones epistémicas en algunos grados de la educación básica*, tesis elaborada en el marco del énfasis en Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad del Valle.

Referencias

Arboleda, L. C. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. En L. C. Recalde y G. I. Arbeláez (Eds.), *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica*. Cali: Universidad del Valle.

Bajtin, M. (1990). El problema de los géneros discursivos (T. Bubnova, Trans.). En M. Bajtin. (Ed.), *La estética de la creación verbal.* (10 ed.). México: Siglo XXI Editores.

Bajtín, M. (1993). ¿Qué es el lenguaje? (A. Bignani, Trans.). En A. Silvestri y G. Blanck (Eds.), *Bajtin y Vigotski: la organización semiótica de la conciencia.*. Barcelona: Anthropos.

Bourdieu, P. (1977). *Outline of a theory of practice* (R. Nice, Trans.). Cambridge: University Press.

Bourdieu, P. (2007). *El sentido práctico* (A. Dilon, Trans.). Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Bourdieu, P. y Johnson, R. (1998). *Practical Reason: On the Theory of Action*. California: Stanford University Press.

Calderón, D. (2003). Género discursivo, discursividad y argumentación. *Enunciación (8).*

Clements, M. A., Bishop, A., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J. y Leung, F. K.-S. (Eds.) (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. New York: Springer.

Cobb, P. (2006). Supporting a discourse about incommensurable theoretical perspectives in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal, (19).* Recuperado de http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome19/index.htm

Cole, M. (1999a). Cultural psychology: some general principles and a concrete example. In Y. Engestrom, R. Miettinen y R.-L. Punamaki (Eds.), *Perspectives on activity theory*. New York: Cambridge University Press.

Cole, M. (1999b). *Psicología cultural: una disciplina de pasado y del futuro* (T. d. Amo, Trans.). Madrid: Ediciones Morata.

Cole, M. y Wertsch, J. (1996). Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotsky. *Human Development, 39*(5), 250-256. Doi: 10.1159/000278474

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática* (M. I. F. Pinilla, Trans.). Mexico: Editorial Reverte.

D'Amore, B. y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa., 10*, 191-218.

Daniels, H. (2003). *Vygostky y la pedagogía* (G. Sánchez Barberan, Trans.). Barcelona: Ediciones Paidos.

Daniels, H. (2008). Reflections on points of departure in the development of sociocultural and activity theory. In B. v. Oers, W. Wardekker, E. Elbers y R. v. d. Veer (Eds.), *The transformation of learning: advances in cultural-historical activity theory*. New York: Cambridge University Press.

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico, Investigación psicológica teórica y experimental.* (M. Shuare, Trans.). Moscú: Editorial Porgreso.

Detlefsen, M. (2005). Formalism. In S. Shapiro (Ed.), *The Oxford handbook of philosophy of mathematic and logic*. New York: Oxford University Press.

Dewey, J. (1960). *Experiencia y Educación* (7ma. ed.). Buenos Aires: Editorial Losada.

Engeström, R. y Kuutti, K. (2006). Activity theory. In K. Brown (Ed.), *Encyclopedia of language and linguistics* (2da. ed.). Amsterdam: Elsevier Ltd.

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Y. Engestrom, R. Miettinen y R.-L. Punamaki (Eds.), *Perspectives on activity theory*. New York: Cambridge University Press.

Engeström, Y. (2009). The future of activity aheory: A rough draft. In A. Sannino, H. Daniels y K. D. Gutiérrez (Eds.), *Learning and expanding with activity theory*. New York: Cambridge University Press.

Engeström, Y. y Sanino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review, 5*, 1-24. Doi: 10.1016/j.edurev.2009.12.002

Epple, M. (2004). Knot Invariants in Vienna and Princeton during the 1920s: Epistemic configurations of mathematical research. *Science in Context, 17*, 131-164.

Ferreirós, J. (2010). Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices EPSA Philosophical Issues in the Sciences. In M. Suárez, M. Dorato y M. Rédei (Eds.), *EPSA Philosophical Issues in the Sciences*. Dordrecht: Springer Netherlands.

Frege, G. (1996a). Consideracionse sobre Sentido y Referencia (U. Moulines, Trans.). En J. Mosterín (Ed.), *Escritos Filosóficos* (1ra. ed.). Barcelona: CRITICA.

Frege, G. (1996b). Función y Concepto (U. Moulines, Trans.). En J. Mosterín (Ed.), *Escritos Filosóficos* (1ra. ed.). Barcelona: CRÍTICA.

Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity. In P. Mancuso, K. F. Jørgensen and S. A. Pedersen (Eds.), Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics (Vol. 327). Netherlands: Springer. Recuperado de http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F1-4020-3335-4_5. Doi: 10.1007/1-4020-3335-4_5

Giusti, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques* (G. Barthélemy, Trans.). Turin Ellipses.

Gueudet, G. y Trouche, L. (2012). Teachers' work with resources: documentational geneses and professional geneses. In G. Gueudet, L. Trouche y B. Pepin (Eds.), *From text to 'Lived' resources: mathematics curriculum materials and teacher development*. Dordrecht: Springer.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático y la instrucción matemática*. Paper presentado en el Seminario del Doctorado Interinstitucional de Educación, Universidad del Valle.

Godino, J. y Font, V. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20* (1 ed.). Mexico: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hegedus, S. y Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics, 30*(1), 26-31.

Hegedus, S. y Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics*. Doi: 10.1007/s10649-010-9297-7

Kaptelinin, V. (2005). The object of activity: making sense of the sense-maker. *Mind, Culture, and Activity, 12*(1), 4-18. Doi: 10.1207/s15327884mca1201_2

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge* (1 ed.). New York: Oxford University Press.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural* (G. S. Barberán, Trans.). Barcelona: Ediciones Paidos.

Kozulin, A. (2003). The concept of activity in Soviet psychology: Vygotsky, his disciples and critics. In H. Daniels (Ed.), *An Introduction to Vygotsky*. London, New York.: Routledge. Taylor and Francis Group eLibrary.

Leave, J. (1991). *La cognicion en la practica*. Barcelona: Paidos.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. New Jersey: Prentice-Hall.

Martínez, M. C. (2005). *La argumentación en la dinámica enunciativa del discurso*. Cali: Universidad del Valle.

Moreno-Armella, L. y Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM Mathematics Education, 41*(4), 505-519. Doi: 10.1007/s11858-009-0200-x

Rabardel, P. et Bourmaud, G. (2005). Instruments et systèmes d'instruments. In P. Rabardel et P. Pastré (Eds.), *Modèles du sujet pour la conception: Dialectiques activités développement* (1 ed.). Toulouse, France: OCTARÈS Éditions.

Rabardel, P. (2005). Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir. Dans P. Rabardel et P. Pastré (Eds.), *Modèles du sujet pour la conception: Dialectiques activités développement* (1 ed.). Toulouse, France: OCTARÈS Éditions.

Rabardel, P. (2003). From artefact to instrument. *Interacting with Computers, 15*, 641-645. Doi: 10.1016/j.intcom.2003.09.004

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa., Numero especial*, 103-120.

Radford, L. (2008). The etics of being an knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathemathics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Rotherdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111-126. Doi: 10.1007/s10649-008-9127-3

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19. Doi: 10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44. Doi: 1 0.4471/redimat.201 3.1 9

Restivo, S. y Collins, R. (2010). Mathematics and civilization. *Philosophy of Mathematics Education Journal,* (25). Available: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome25/index.html website:

Ricoeur, P. (2001). *Del texto a la acción. Ensayos de hermenéutica II* (P. Corona, Trans. 1 ed.). Angentina: Fondo de Cultura Económica.

Roth, W.-M. y Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical perspective on mathematics teaching and learning*. The Netherlands: Sense Publishers.

Silvestri, A. y Blanck, G. (1993). *Bajtín y Vigotski: la organización semiótica de la conciencia* (1 ed.). Barcelona: Anthropos.

Sriraman, B. y English, L. (Eds.). (2010). *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*. New York: Springer Berlin Heidelberg.

Stetsenko, A. (2005). Activity as object-related: resolving the dichotomy of individual and collective planes of activity. *Mind, Culture, and Activity, 12*(1), 70-88. Doi: 10.1207/s15327884mca1201_6

Trouche, L. (2002). Geneses instrumentales, aspects individuels et colletives. In D. Guin et L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un probleme didactique* (1 ed.). Grenoble.: La Pense Savage éditions

Vasco, C. (1994). La Educación Matemática: una disciplina en formación. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 3*(2), 59-75.

Vygotsky, L. (1993). Pensamiento y lenguaje (J. M. Bravo, Trans.) *Obras escogidas II* (Vol. 2). Madrid: Visor.

Vygotsky, L. (1994). The development of thinking and concept formation in adolescence (T. Prout y R. v. d. Veer, Trans.). In R. van der Veer y J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader*. Cambridge, Massachusetts: Blackwell Publishers.

Vygotsky, L. (1995). Problemas del desarrollo de la psique (L. Kuper, Trans.) *Obras escogidas III* (Vol. 3). Madrid: Visor.

Wertsch, J. V. (1988). *Vygostki y la formación social de la mente* (J. Zanón y M. Cortés, Trans. 1 ed.). Barcelona: Paidos.

Diseños didácticos con incorporaciones tecnológicas para el aprendizaje de las formas geométricas, en primeros grados de escolaridad de estudiantes sordos[1]

Instructional technology designs for learning geometric shapes additions in early grades of schooling of deaf students

Projetos de tecnologia de instrução para aprender adições formas geométricas em séries iniciais de escolarização de alunos surdos

Fecha de recepción: enero de 2014

Fecha de aceptación: julio de 2014

Olga Lucía León Corredor[2]

Faberth Díaz Celis[3]

Marcela Guilombo[4]

Resumen

Este artículo presenta resultados de investigaciones sobre diseños didácticos con incorporaciones tecnológicas para el aprendizaje de la geometría en estudiantes sordos, de los primeros grados de escolaridad. Los resultados profundizan en la relación trayectorias de aprendizaje y diseños didácticos para la enseñanza inicial de la geometría y presentan una experiencia focal con estudiantes sordos. Se destacan las mediaciones semióticas y tecnológicas en los procesos de significación de las formas geométricas. La metodología recupera los fundamentos de los "experimentos de enseñanza", en particular la estructura denominada "el ciclo de enseñanza".

Palabras clave: diversidad, didáctica de la geometría, trayectorias hipotéticas de aprendizaje, población sorda, , diseños didácticos.

Abstract

This article presents research results on didactic design using technology to teach geometry to deaf students in elementary school. The results look in depth at the relations between learning trajectories and didactic designs to teach geometry. The article emphasizes in semiotic and technological mediation, in order that the students build the meanings of

1 Articulo de investigación.

2 Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia). Contacto: olleon@udistrital.edu.co

3 Estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia). Contacto: faberththd@yahoo.com

4 Estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Joven investigadora de Colciencias, Bogotá (Colombia). Contacto: marcelaguilombo@gmail.com.

geometrical shapes. The methodology that we use is based on "teaching experiments", and particularly the "teaching cycle".

Keywords: Diversity, geometry didactics, hypothetic learning trajectories, deaf population, didactic designs.

Resumo

Este artigo apresenta resultados de pesquisa sobre projeto didático usar a tecnologia para ensinar geometria para surdos no ensino fundamental. Os resultados em profundidade olhar para as relações entre as trajetórias de aprendizagem e projetos didáticos para ensinar geometria. O artigo enfatiza a mediação semiótica e tecnológica, a fim de que os alunos constroem os significados das formas geométricas. A metodologia que usamos é baseado Que em «experiências de ensino» e, particularmente, o «ciclo de ensino».

Palavras-chave: diversidade, geometria didática, hipotéticos aprendizagem trajetórias, deaf população, projetos didáticos.

La relación necesaria entre "diseño para todos" y "diseño con todos" en una didáctica para la didáctica de la matemática

La relación entre "diseño para todos" y "diseño con todos" es un punto de partida necesario para una reflexión didáctica sobre la didáctica de las matemáticas, en la formación de un estudiante para profesor, que produce diseños para todos y promueve la interacción entre poblaciones diversas.

En lo que concierne a poblaciones en situación de diversidad, las reflexiones didácticas de los formadores de profesores sobre la didáctica de la matemática, han considerado por muchos años que todos los estudiantes a los que se dirigen los diseños didácticos tienen procesos de percepción visual similares, sin embargo, algunos de los estudiantes no visualizaran por efecto de una percepción visual, o no organizan el mundo como efecto del uso de lenguas no naturales para ellos.

La reflexión sobre cómo desarrollar procesos didácticos que promuevan los aprendizajes didácticos en un estudiante para profesor y que acojan la diversidad de poblaciones, plantea al formador de profesores tres tipos de exigencias:

- De orden epistemológico, que hace referencia a quiénes son "todos", cuando se consideran diseños curriculares y didácticos en matemáticas. ¿Son sujetos epistemológicos con potencial de aprendizaje o sujetos con existencia real en la sociedad y con necesidades de aprendizajes específicas?
- De orden social, referido a las formas de concentración de las poblaciones y a los escenarios que promueven la educación "con todos". El problema de una educación "con todos", consiste en una educación que se realiza en el momento de vida apropiado, en el lugar necesario, con los recursos adecuados y sin marginaciones de población. Los escenarios que permiten a las tecnologías y a la educación desarrollar

una educación sin marginaciones, en un ambiente de revolución digital en América Latina y el Caribe, son: 1) el escenario que proporcionan las redes digitales; 2) el escenario de las redes de inmigrantes; 3) el escenario de la escuela pública; 4) el escenario de los derechos humanos (Martín Barbero, 2009); y 5) el escenario de la formación de profesores en ambientes interdisciplinarios.

- De orden curricular, relacionado con la formación didáctica y la vinculación de campos como la cantidad, la forma y la magnitud que estructuran la matemática escolar y procesos como diseñar, gestionar y evaluar unidades didácticas, que estructuran la formación en una didáctica de la matemática escolar.

Las tres exigencias se vinculan a la necesidad de desarrollar en el estudiante para profesor una experiencia con un cierto tipo de conocimiento característico de su profesión: el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Dos prácticas consolidan ese tipo de conocimiento, la *práctica matemática*, es decir, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar construcciones y reconocer construcciones útiles a prácticas matemáticas en cada cultura, y la *práctica didáctica* entendida como acciones orientadas a atender requerimientos y resolver problemas relacionados con las tareas profesionales y articuladoras del enseñar y aprender matemáticas (León et al., 2013a).

Los diseños didácticos "para todos" y "con todos" en la formación de profesores manifiestan la presencia de:

- La accesibilidad al manejo de la información de la situación, bien sea por registro escrito, registro visual, registro auditivo o registro viso-gestual.
- La accesibilidad a la situación por audición, visión, aspectos táctiles o por aspectos perceptuales de otros órdenes
- Accesibilidad a las formas de representar y operar las relaciones y los objetos matemáticos emergentes de la información.
- Accesibilidad a las formas de comunicar y cooperar en el estudio de la información que propone la situación.

En este tipo de reflexión didáctica, el aprender a enseñar matemáticas es un proceso paulatino de incorporación en una comunidad de práctica, comporta un reto de aprendizaje que comienza por reconocer los alcances de las ideas, costumbres, teorías y modos de trabajo y enseñanza adquiridos, proceso a cargo de quien quiere saber y usar las matemáticas en sus culturas.

Incorporaciones tecnológicas en los diseños didácticos

En los diseños didácticos "para todos" y "con todos" los usuarios de los escenarios naturales participan y tienen efecto en sus procesos de aprendizaje, profesores y estudiantes en espacios escolares, que acogen la diversidad e identifican factores asociados a la implementación de los diseños. Se trata de lograr comunidades competentes para interactuar con poblaciones diversas generando procesos de identificación y de negociabilidad de significados. Se trata de sentir y comprender qué se pierde cuando se está imposibilitado de realizar, de participar, de interactuar en diversidad. ¿Hablar de experiencias matemáticas con estudiantes sordos?, ¿visualizar procesos matemáticos con estudiantes ciegos?, ¿objetivar en matemáticas o razonar acerca de algo en diferentes lenguas?, ¿cuál es el papel de las interacciones entre las viejas y las nuevas tecnologías en la configuración de respuestas a estas preguntas? Hay pocos estudios acerca de las interacciones comprometidas en las preguntas antes formuladas, pues interrogan un sistema de relaciones casi inédito (León et al., 2013a).

Los referentes curriculares para la formación de profesores en contextos de diversidad (León et al., 2013a), proponen al formador de profesores:

- Propiciar estructuras curriculares que fomentan una educación matemática para que las sociedades coexistan, reconozcan y promuevan la humanidad en sus diversas manifestaciones.
- Considerar a América Latina como una fuente de recursos para la formación matemática de sus estudiantes para profesor
- Considerar la educación matemática y la didáctica de la matemática como procesos, resultados y campos de producción de conocimiento en educación, desarrollados por comunidades de profesores, estudiantes, familias y sociedades, y por los sistemas educativos.
- Considerar las TIC en la educación matemática como una nueva narrativa para las matemáticas (Moreno y Kaput, 2005), su enseñanza y aprendizaje.

Puede decirse que toda mediación instrumental es una mediación semiótica debido a que produce negociación de significados (León et al., 2013b). En los diseños didácticos que vinculan situaciones como enunciados escritos, sistema de gráficos, videos o juegos, emergen tipos de representaciones que orientan la modelación matemática necesaria para el desarrollo del diseño. La tabla 1 presenta las relaciones necesarias entre instrumentos y modelaciones.

Representaciones que orientan la modelación	Tipos de instrumentos
Enactivas: uso del cuerpo para representar posibilidades dinámicas de los objetos o aspectos de la situación. Icónicas: uso de instrumentos para realizar dibujos asociados a los objetos presentados en la situación, o símbolos vinculados con atributos de la situación. Simbólica: usos de sistemas de representaciones semióticas, escritas o gestuales, para representar tanto los objetos de la situación como las relaciones entre esos objetos, y para representar expresiones que modelan las relaciones matemáticas identificadas en la situación.	El cuerpo. Objetos de tecnologías ancestrales como el lápiz y el papel, el ábaco, los juegos antiguos. Equipos para capturar informaciones de los fenómenos incorporados a las situaciones, (grabadoras, cámaras). Equipos para registrar y sistematizar los datos provenientes del análisis de las situaciones (calculadoras, computadores, software). Instrumentos para simular las situaciones (Software y equipos productores o replicadores de imágenes sonidos). Instrumentos para operar datos (cuerpo, ábacos, calculadoras computadores con diversidad de software que ejecutan)

Tabla 1. Tipos de sinergias entre diseños didácticos, modelaciones y uso de instrumentos

Fuente: elaboración propia

Las instituciones educativas disponen, a través de los currículos, estructuras para organizar la formación de sus estudiantes, así como la intención de dicha formación. Ubica trayectos a ser recorridos por sus estudiantes, y ciertas maneras de transitar y de no transitar por estos trayectos. Para las instituciones que forman profesores, el currículo tiene una función instrumental, que, entre otras, media la formación didáctica.

La investigación de diseño y la metodología de experimentos de enseñanza

La investigación de diseño o investigación basada en diseño, según Cobb y Gravemeijer (2008), es una forma de estudiar los diseños didácticos, entendidos como proyectos de acción para sistematizar la manera como el sujeto se apropia del objeto de conocimiento. Esta forma de investigación, cualitativa, involucra el proceso de configuración de acciones para la enseñanza y el estudio sistemático de secuencias particulares de aprendizaje en contexto.

La investigación basada en diseño reconoce la dependencia existente entre el diseño del docente-investigador y el análisis del observador-investigador, que se genera en el contexto de los ambientes de aprendizaje (Cobb y Gravemeijer, 2008). A partir de las relaciones entre la teoría educativa, la práctica y los instrumentos, se estudia el proceso de aprendizaje y se analizan los modos con los cuales éste se sustenta y se organiza mediante recursos didácticos o herramientas conceptuales (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008).

Este tipo de investigación aplica las teorías del aprendizaje y enseñanza a situaciones diversas y permite fundamentar empíricamente el conocimiento. Así mismo, aporta información sobre el diseño instruccional relativo a un dominio de aprendizaje específico, que puede servir para la generación de nuevos modelos teóricos (Cobb et al., 2003; Shavelson, Phillips, Towne y Feuer, 2003).

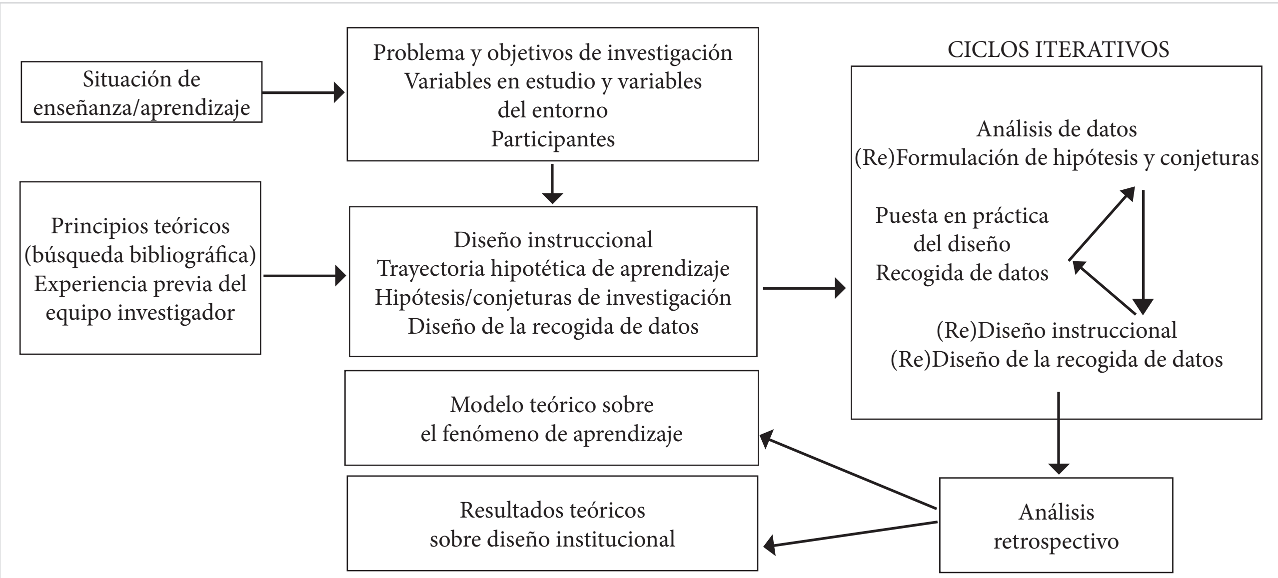


Figura 1. Estructura general de una investigación de diseño

Fuente: Molina, Castro, Molina, Castro (2011, p. 76)

La figura 1 muestra la estructura general de una investigación de diseño, en la que se inicia con una situación de enseñanza-aprendizaje contextualizada, de la cual no se pueden determinar a priori todos sus parámetros.

A partir de la formulación de un problema y sus correspondientes objetivos de investigación, se caracteriza el contexto y se propone un diseño instruccional en forma de hipótesis o conjetura. Esta forma de diseño experimental no pretende la confirmación de los constructos teóricos previos, sino que busca la acomodación del modelo teórico a la realidad observada, según esta siga siendo viable a la vista de los datos obtenidos (Confrey, 2006; Steffe y Thompson, 2000). La investigación se produce a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis de datos y rediseño (Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004), los cuales van acompañados de ciclos de actividades y recolección de datos, reformulación de conjeturas y rediseño instruccional.

Además de fortalecer modelos teóricos de aprendizajes en un contexto, el análisis de la investigación puede servir de modelo para otros diseños. Entre los estudios de diseño que se aplican con mayor frecuencia se destacan los experimentos de enseñanza (Cobb y Gravemeijer, 2008). Un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000), con una duración variable —una sesión de aprendizaje, una conjunto de sesiones o un curso completo— y una "atmósfera" a observar que puede ser un espacio-laboratorio para entrevistas o un aula de clase completa.

Los experimentos de enseñanza reconocen, siguiendo a Menchinskaya (1969) que "ni los conceptos científicos, ni los cotidianos brotan espontáneamente, ambos se forman bajo la influencia de la enseñanza de adultos" (p. 79) y proponen que los niños forman conceptos científicos como resultado de recibir instrucción en la escuela de temas específicos. Los adultos pueden ayudar a los niños en su intento de aprender matemáticas, sin embargo, no son las intervenciones de los adultos en sí las que determinan las construcciones de los niños, son las experiencias de los niños, en estas intervenciones, las que son interpretadas por ellos en términos de sus propias estructuras conceptuales.

El ciclo de enseñanza y las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Los experimentos de enseñanza han llevado al desarrollo del Ciclo de Enseñanza de Matemáticas (figura 2), como un modelo esquemático en el que se genera una trayectoria hipotética de aprendizaje, el profesor-investigador diseña una secuencia para la situación didáctica en el aula.

La figura del Ciclo de Enseñanza describe la relación entre los diversos ámbitos de conocimiento de los profesores, la trayectoria hipotética de aprendizaje y las interacciones con los estudiantes. La evaluación del conocimiento de los estudiantes es un proceso que conduce a un ajuste permanente de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

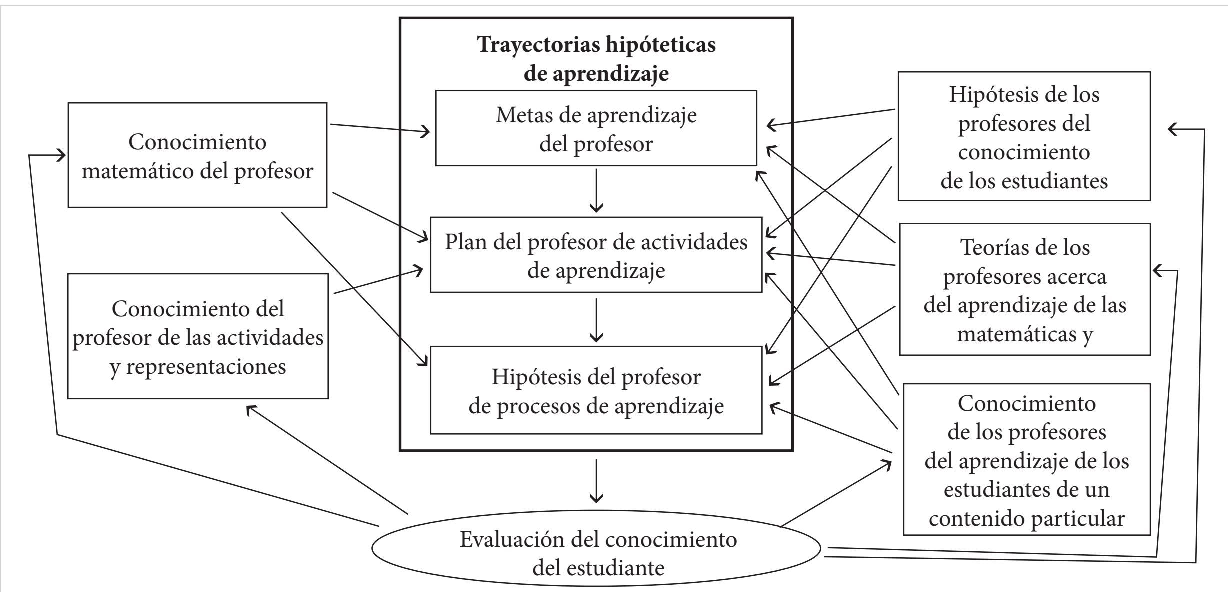


Figura 2. Ciclo de enseñanza

Fuente: Simón (1995)

Los conocimientos matemáticos del profesor sobre la geometría euclidiana, la topología y la geometría proyectiva, junto con sus hipótesis acerca del estado de conocimiento geométrico de sus estudiantes y de las teorías sobre aprendizaje de la noción de forma, le permiten establecer las metas de aprendizaje del curso.

El profesor puede establecer de manera paralela o secuencial, los niveles por los cuales él considera que sus estudiantes pueden avanzar en la ruta de aprendizaje para desarrollar una experiencia geométrica con la forma o diseñar una secuencia de actividades que puede ayudar a los niños a avanzar de un nivel a otro. Para la toma de decisiones sobre los niveles y las actividades, el profesor requiere conocer —haber consultado, analizado o experimentado— alguna secuencia de actividades que muestren éxito para propiciar el avance de los estudiantes.

Poner en práctica el diseño de las actividades sobre la noción de forma por parte del profesor, va acompañado de un proceso de evaluación en el que se establecen las características de la Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA) de la noción forma que cada estudiante recorre. La recolección de datos y el análisis de los mismos, permiten hacer un rediseño de las hipótesis y conjeturas del modelo y de una reformulación de las actividades propuestas.

Aunque el profesor propone un objetivo inicial y un plan para la instrucción, por lo general, éste debe ser modificado muchas veces —tal vez continuamente— durante el estudio de un área conceptual. Cuando los estudiantes comienzan a participar en las actividades previstas, el profesor observa y se comunica con ellos, generando una nueva comprensión sobre las concepciones de los estudiantes. El ambiente de aprendizaje se desarrolla como resultado de la interacción entre el profesor y los estudiantes que se dedican al aprendizaje. Los elementos necesarios para dinamizar las decisiones que toma el profesor en un Ciclo de Enseñanza son:

- El pensamiento y la comprensión de los estudiantes tienen un lugar central en el diseño y la ejecución de la instrucción —proceso continuo de recopilación de datos y generación de hipótesis—.
- El conocimiento de matemáticas del profesor avanza al mismo tiempo que crece su conocimiento de cómo aprenden sus estudiantes.
- La planificación para la instrucción incluye la generación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje, en las que se toman decisiones sobre los propósitos para la instrucción y sobre las hipótesis de los procesos de aprendizaje de los alumnos.
- El cambio continúo del conocimiento del profesor, cambia de forma continua las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Entender el aprendizaje como un proceso de construcción individual y social, proporciona a los maestros un marco conceptual sobre el aprendizaje de sus estudiantes y las decisiones, en cuanto a la naturaleza y secuencia de las matemáticas que han de ser enseñadas, proceden de hipótesis sobre la epistemología y el aprendizaje de las matemáticas Laborde (1989).

La expresión "Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje" (THA) se usa para referirse a las predicciones del profesor sobre el camino por el que el aprendizaje puede continuar. Son hipotéticas debido a que las trayectorias reales de aprendizaje dependen de la condición de existencia de cada individuo y a que el aprendizaje de los individuos tiene ciertas regularidades. Las THA proporcionan al profesor un criterio racional para decidir el diseño que él considera la mejor conjetura de cómo puede avanzar el aprendizaje.

Las THA analizadas por Sarama, Clements y Vukelic (1996), "ayudan a los maestros a entender la variedad de niveles de conocimiento y de pensamiento de sus clases y de los individuos dentro de ellas, como fundamentales para satisfacer las necesidades de todos los niños" (p. 16). Los autores expresan que la propuesta de las THA contribuye en dar respuesta a preguntas como: ¿qué metas o propósitos se deben establecer en el aprendizaje de las matemáticas en niños y niñas?, ¿por dónde empezar el aprendizaje de las matemáticas en cada momento de desarrollo de los niños y niñas?, ¿cómo sabemos a dónde ir con el aprendizaje de las matemáticas de los niños y niñas?, ¿cómo podemos favorecer el aprendizaje para que los niños y niñas vayan alcanzando las metas o propósitos?

Las THA tienen tres partes: 1) una meta o propósito matemático, entendido como el conjunto de los conceptos y habilidades que son matemáticamente centrales, coherentes, y consistentes con el pensamiento de los niños y generadoras de futuros aprendizajes; 2) una ruta de desarrollo a lo largo de la cual los niños progresan, constituída por los niveles de pensamiento cada uno más sofisticado que el anterior y que conducen a la meta matemática; 3) un conjunto de actividades instruccionales, o tareas relacionadas para cada uno de los niveles de pensamiento, que fomentan el paso de un nivel a otro.

Entonces, "las trayectorias de aprendizaje describen las metas, el pensamiento, y los procesos de aprendizaje de los niños en los distintos niveles y las actividades de aprendizaje en las cuales ellos podrían participar" (Clements y Sarama, 2009, p. 17) y están "basadas en el desarrollo mental progresivo" (Clements y Sarama, 2009, p. 252).

Los niveles propuestos en las trayectorias pueden describir la ruta de aprendizaje que ocupa el periodo de vida correspondiente al tiempo de escolarización o pueden abarcar la ruta de aprendizaje que siguen las personas durante toda su vida. En el segundo caso, Clements y Sarama (2009), aumentan la cantidad de niveles y proponen el aprendizaje como una condición del ser humano que trascurre de manera permanente desde el nacimiento.

El proceso de escolarización organiza intencionalmente las actividades que ayudan al estudiante a avanzar en su aprendizaje, pero no constituye el único dispositivo cultural que lo promueve. Otras interrelaciones, como las experiencias familiares, las interacciones con el ambiente, las necesidades de adaptación al medio socio cultural y los estímulos de los medios de comunicación, favorecen el desarrollo de los niveles de las trayectorias de aprendizaje.

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de la noción forma para estudiantes sordos y oyentes

El aprendizaje de la geometría, considerado como un gran campo del saber didáctico, presenta trayectorias hipotéticas de aprendizaje para objetos matemáticos específicos, que se enmarcan en el espacio, la forma y la magnitud. Autores como Clements y Sarama (2009) centran su atención en la forma y la enuncian como el gran descriptor, estableciendo que las abstracciones geométricas de las formas son las figuras geométricas.

En los primeros años de vida de una persona sorda u oyente, se desarrolla la capacidad de distinguir o reconocer las formas, este proceso es de gran importancia porque permite la discriminación de los objetos según sus lados y esquinas, a partir de una comparación en la que se privilegian las percepciones visuales y táctiles, Clements y Sarama (2009) proponen para el desarrollo de avances conceptuales tres THA de la noción forma, y consideran que las THA se fundamentan en que el aprendizaje de la persona se da a partir del desarrollo progresivo y sucede según la complejidad de las tareas que se proponen. Este desarrollo refleja una jerarquización progresiva, que le permite organizar estructuras previas y elaborar un plan mental para construcciones más complejas.

Las tres THA propuestas por Clements y Sarama (2009) para la noción forma están fuertemente relacionadas con el reconocimiento de la geometría como una importante fuente de modelación que permite interpretar, entender y apreciar un mundo que se torna particularmente geométrico.

Cada una de las tres THA asociadas a la noción de forma geométrica hace explícitos macro procesos como se presenta en la tabla 2.

TIPO DE TRAYECTORIA	TIPOS DE PROCESOS
THA para pensamiento espacial.	*Orientación espacial* (considera puntos de referencia y coordenadas)
	Visualización espacial (discurre en la ubicación de las formas y ejecuta movimientos)
THA para el desarrollo de formas bidimensionales y tridimensionales.	Composición de figuras en 3D
	Composición y descomposición de figuras 2D
	Extractor de figura
THA para figuras geométricas.	*Comparación* (incluye niveles de principios de congruencia y determinación).
	Clasificación (clasifica las formas a partir de un reconocimiento, identificación y análisis).
	Reconocimiento de componentes (implica distinguir, nombrar, describir y cuantificar los componentes de las formas como los lados y ángulos).
	Representación (implica la construcción de las formas).

Tabla 2. Macro procesos de las THA de las formas geométricas

Fuente: elaboración propia

Trayectoria real de aprendizaje en un grupo focal de niños sordos

Las trayectorias de aprendizaje están vinculadas a la vida del aprendiz, es decir, no sólo suceden en la institucionalidad, inician con la vida. Por ejemplo, son los padres quienes, en la mayoría de casos, inician el desarrollo de las trayectorias de manera implícita, procurando que sus hijos aprendan algunas nociones antes de llegar a la escuela. Cuando un niño llega al aula regular hace uso de un lenguaje y de los diferentes elementos aprendidos en el hogar, los cuales le ayudan a avanzar hábilmente en su aprendizaje. En consecuencia, el desarrollo del aprendizaje está mediado por el ambiente en el cual se encuentra el niño.

La gran mayoría de niños sordos tienen padres oyentes que no saben cómo comunicarse con sus hijos sordos, situación que genera un dialogo limitado entre padres e hijo. En algunos casos, los niños llegan al aula e inician su escolaridad con bajos desarrollos en su lengua y las experiencias necesarias para su aprendizaje no han podido desarrollarse debido a las limitaciones comunicativas que tiene en su ambiente.

La THA de las formas geométricas, se propuso a un grupo de niños sordos de un aula multigradual especializada para la población, en una institución escolar de Bogotá (Colombia) cuya población mayoritaria es oyente. La docente que enseña a los niños sordos es oyente y tiene manejo de Lengua de señas Colombiana (LSC).

La THA de las formas geométricas considera indicadores de avances de niveles acompañados de un sistema de actividades. El diseño de investigación consideró los diez primeros niveles de la THA de las figuras (figura 3).

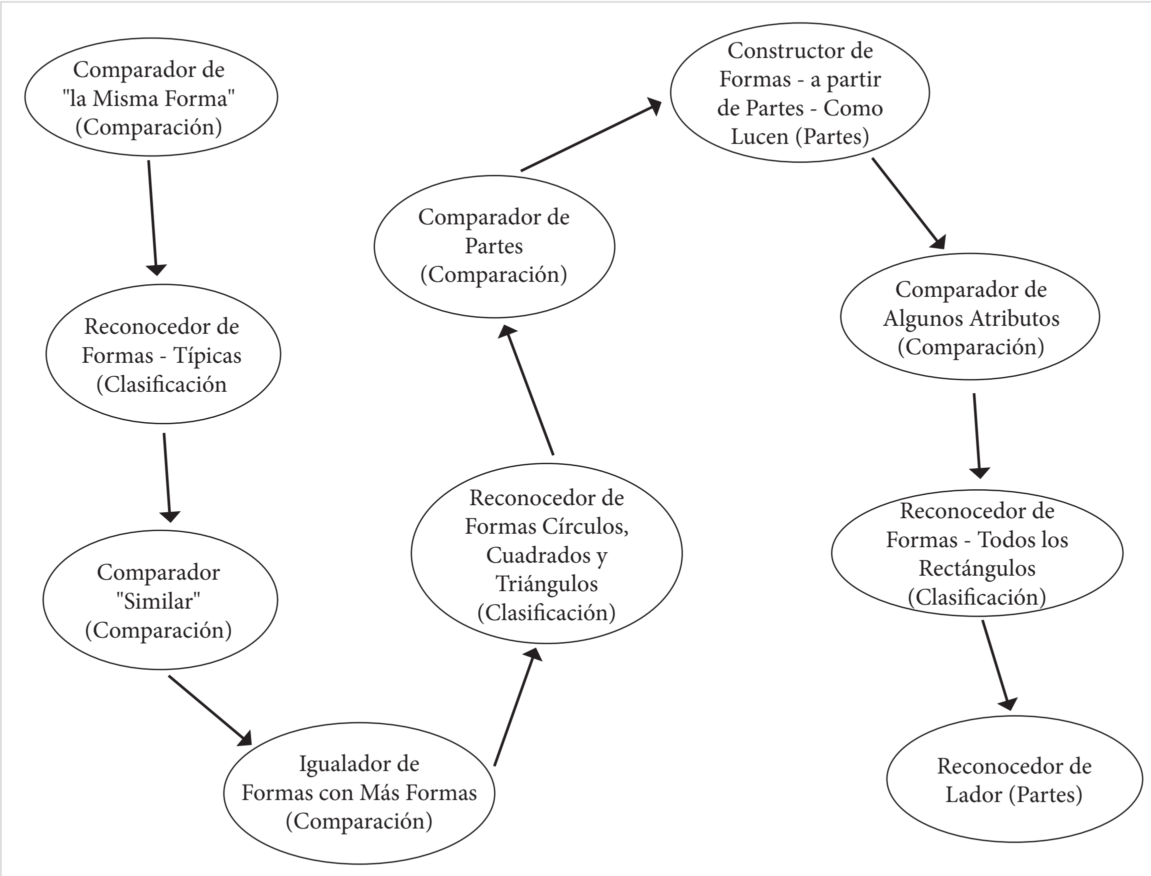


Figura 3. THA de las figuras geométricas hasta el nivel X

Fuente: elaboración propia

La Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA) que se presenta en adelante, evidencia las formas y modos en que el aprendiz pasó o no por los niveles. Para el seguimiento de la TRA se establecieron rejillas que permitieron identificar el cumplimiento de indicadores del nivel de la THA, para cada estudiante y para cada nivel. A continuación se presentan las rejillas de registro de datos del estudiante sordo ζ. La rejilla que presenta la figura 4 relaciona los indicadores del nivel con los artefactos producidos por el estudiante que dan razón de la presencia del indicador.

Nivel I Comparador de "la Misma Forma" (Compración)												
Estudiante	Indicador del nivel											
	Comparar "las mismas Figura" *Comparación* de objetos del mundo real (Wurpillot, 1976)		**Expresa en LSC** Dos representaciones o dos imágenes son la misma o diferentes		**Igualar Formas - Idénticas.** *Comparación* Emparejar figuras que le sean familiares y que tengan *el mismo tamaño y orientación* (círculos, cuadrados, triángulos típicos		**Tamaños** Iguala figuras que le sean familiares pero con diferentes tamaños.		**Orienta** figuras que le sean familiares pero con diferente orientación.		**Dificultades que tiene en el nivel**	**Ubicación de la trayectoria**
ζ	2	13(1)F ζ 13(2)F ζ	2	II(2)V ζ II(3)F ζ	2	13(1)F ζ	2	II (1)F ζ II (4)F ζ	2	14(1)F ζ	- - - - - - -	Sí

Figura 4. Rejilla de registro de progresión de nivel

Fuente: elaboración propia

El estudiante sordo ζ en el primer nivel de la trayectoria denominado "comparador de la misma forma", orienta figuras que le son familiares como se ilustra en la figura 5.

Figura 5. Representación del nivel I

Fuente: elaboración propia

Luego, en el nivel IV, el niño ζ además de orientar las formas puede igualar una mayor variedad de figuras de diferentes tamaños y con diferentes orientaciones.

En este nivel, la TRA también evidencia un avance en la expresión de LSC del niño sordo, al proponer a través de su lengua una manera de nombrar las formas, en las figuras 6 y 7 se evidencia el desarrollo de la expresión "lo mismo que" o "igual a", considerando solo el atributo forma cuadrada, como el invariante identificado y nominado por su lengua.

Figuras 6 y 7. Representaciones del nivel IV

Fuente: elaboración propia

Para el desarrollo del lenguaje se observa que, a medida que los niños van realizando las actividades de la THA, sus expresiones lingüísticas evidencian su avance en los niveles de desarrollo de una trayectoria real. Los niños reflejan de esta manera una jerarquización progresiva que les permite establecer relaciones, organizar estructuras y construir planes mentales para actividades más complejas.

En la actividad donde se debe seleccionar un grupo de láminas con figuras que consideren igual a la de la primera columna y otro grup que consideren diferente. El estudiante ζ, como se muestra en la figura 8, logra identificar las figuras iguales en forma y no en tamaño, pero no logra escribir el nombre de las mismas en español.

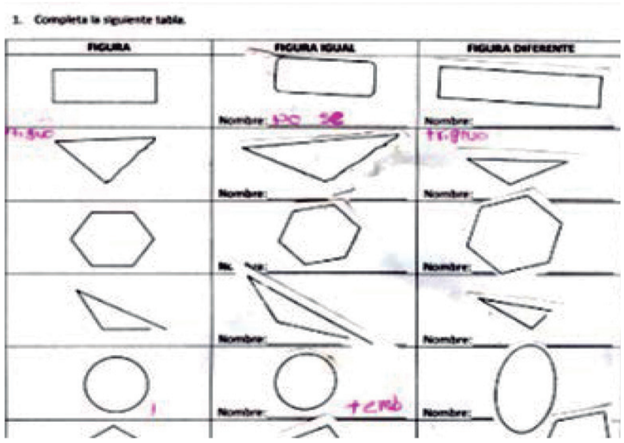
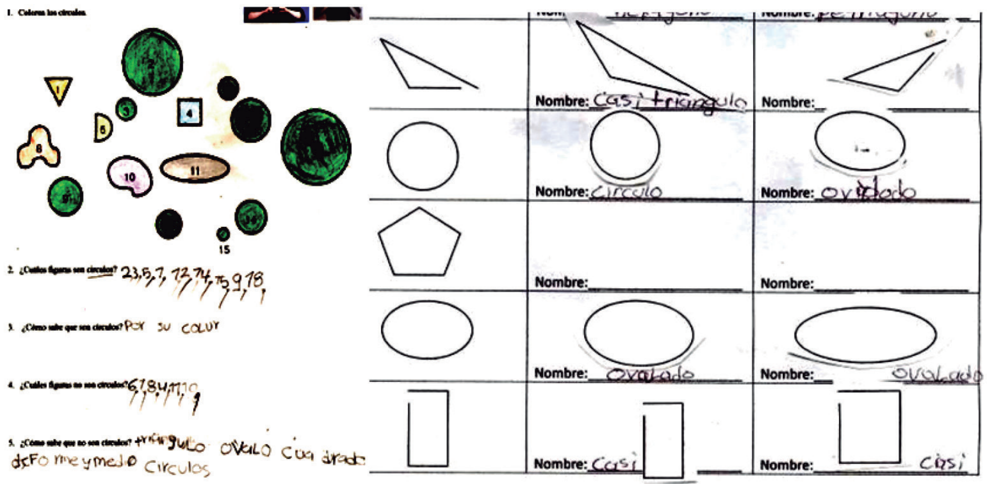


Figura 8. Artefacto estudiante ζ, actividad nivel I

Fuente: elaboración propia

En las figuras 9 y 10, se muestran artefactos que fueron producidos en un nivel superior, y que evidencian un desarrollo en el español escrito de los estudiantes sordos al asignar nombres a las formas que no consideran círculos. Del mismo modo, se evidencian un desarrollo en los procesos de clasificación, al asignar la palabra "deforme" a las formas que no están en las clasificaciones geométricas desarrolladas hasta el momento (figura 9). El uso de la palabra "casi" (figura 10) es otra evidencia de su desarrollo lingüístico.



Figuras 9 y 10. Artefactos estudiante ζ del nivel IV

Fuente: elaboración propia

A medida que los niños van desarrollando las actividades de la trayectoria hipotética sus expresiones lingüísticas se vuelven indicadores de avance en los niveles de desarrollo de una trayectoria real. Este desarrollo refleja una jerarquización progresiva, permitiéndole establecer relaciones, organizar estructuras y construir planes mentales para actividades más complejas.

Conclusiones

Los “diseños para todos” y los “diseños con todos” transforman la acción didáctica de un formador de profesores en lo que se refiere a promover la enseñanza y aprendizaje de la didáctica de las matemáticas en los estudiantes para profesor. Se configura el campo que se denomina de “Didáctica de la didáctica de las matemáticas”, un campo que considera la didáctica de las matemáticas como un objeto enseñable y aprendible.

Las relaciones entre práctica, mediación instrumental y significado abogan por un currículo de formación de profesores generado a partir de los siguientes cinco principios: diversidad, flexibilidad, integrabilidad, accesibilidad e interdisciplinariedad, considerando los cinco escenarios que otorgan dimensión a las sinergias entre tecnologías y educación para todos.

Los ciclos de enseñanza aportan una metodología de investigación sobre diseños didácticos, que relaciona las teorías, saberes y prácticas, e hipótesis de aprendizaje, con el propósito de aportar a la acción cotidiana del profesor de matemáticas en la toma de decisiones. En este tipo de metodología la presencia de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje y Trayectorias Reales de Aprendizaje es un indicador del aprendizaje.

La noción de forma se puede desarrollar desde varias trayectorias de aprendizaje y esto es algo que no pueden ignorar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que se proponen desde las instituciones escolares. Considerar diferentes trayectorias hipotéticas de aprendizaje es valorar en los diseños didácticos diversidad de condiciones para que poblaciones diversas puedan negociar sus significados.

Para el caso de las poblaciones sordas las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de la forma se vinculan a trayectorias reales de aprendizaje que evidencian una relación muy fuerte entre lengua y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Clemens, D., y Samara, J. (2009). *Early childhood mathematics education research.* New York: Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P. and Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Collins, A., Joseph, D. and Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In Sawyer, R.K. (Ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. Nueva York: Cambridge University Press.

Laborde, C. (1989). Hardiesse et raison des recherches francaises en didactique des mathématiques. Dans G. Vergnaud, J. Rogalski et M. Artigue (Eds.), *Actes de la 13eme Conference internationale de Psychology of Mathematics* Education, 1, 46-61. Paris, France.

León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Avila, C., Bacca, J., Cavanzo, A. et al. (2013a). *Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación de profesorado de matemáticas*. México: Universidad pedagógica Nacional.

León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Avila, C., Bacca, J., Cavanzo, A., Guevara, C. et al. (2013b). *Orientaciones para la integración de las TIC en la enseñanza de las matemáticas*. Acceso: noviembre 18 de 2013. Recuperado de http://boppo.udg.edu:8000/ATutor/bounce.php?course=30

Martín-Barbero, J. (2009). Cuando la tecnología deja de ser una ayuda didáctica para convertirse en mediación cultural. *Revista Electrónica teoría de la Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 101*, 19-31.

Menchinskaya, N. (1969). The psychology of mathematics concepts: fundamentals problems and methods of research. In: Kilpatrick y Wirszup (Eds.), *Soviets studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. I). Stanford, California: School Mathematics Study Group, (NCTM).

Molina, M., Castro, E., Molina, L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 075–088.

Moreno, L., y Kaput, J. (2005). Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra. En M. Alvarado y B. Brizuela (Eds.), *Haciendo Números*. México: Paidós.

Sarama, J., Clements D. H. y Vukelic, E.B. (1996). The role of a computer manipulative in fostering specific psychological/mathematical processes. In E. Jakubowski, D. Watkins y H. Biske (Eds), *Proceedings of the Eighteenth Anual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, Ohio: Eric Clearinghouse for Science.

Shavelson, R. J., Phillips, D.C., Towne, L. y Feuer, M.J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher*, *32*(1), 25-28.

Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in* Mathematics Education, 26(2), 114- 145. Recuperado en octubre de 2010, de http://www.jstor.org/stable/749205

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah: NJ: LAE.

Agradecimientos:

Artículo de investigación que presenta los resultados del proyecto Alter-nativa financiado por la Unión Europea ALFA III y el proyecto: “La mediación instrumental en el aprendizaje de la geometría en población sorda”, financiado por Colciencias y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Algunas consideraciones sobre los numerales mayas[1]

Some considerations about Mayan numerals

Algumas considerações sobre os numerais maias

Fecha de recepción: enero de 2014
Fecha de aprobación: julio de 2014

Óscar Fernández Sánchez[2]
Harold Duque Sánchez[3]

Resumen

Para los mayas, a diferencia de Occidente, la matemática tiene un significado que sobrepasa los numerales y las operaciones entre ellos. Según su cosmovisión, la Deidad, la creadora del universo, es soberana en cuanto al cálculo matemático (Cabrera, 1992). La matemática maya ofrece la posibilidad de realizar las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación, división y cálculo de raíces de forma sencilla, dado que la cultura maya logró sintetizar la cantidad mediante tres símbolos y logró sintetizar el valor con el sistema posicional en base veinte (Calderón, 1966). Se pretende en este artículo hacer un reconocimiento de los numerales mayas, su concepción metafórica y algunas operaciones aritméticas.

Palabras clave: numeral maya, metáfora, suma, multiplicación

Abstract

For the Maya, unlike the West, mathematics goes beyond numerals and operations between them. According to their Cosmovision, the Godhead, who created the universe, is sovereign in terms of mathematical calculation (Cabrera, 1992). The Mayan mathematics provides the possibility to perform arithmetic operations of addition, subtraction, multiplication, division and calculation of simple roots, as the Mayan culture was able to synthesize the amount by three symbols and they synthesize the value by based twenty systems (Calderon, 1966). This article pretends do recognition the Mayan numerals, their metaphorical conception and some of their arithmetic operations.

Keywords: Mayan numeral, metaphor, addition, multiplication.

1 Artículo de revisión.

2 Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia). Contacto: oscarf@utp.edu.co

3 Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia). Contacto: harold1@utp.edu.co

Resumo

Para os maias, ao contrário do Ocidente, a matemática vai além dos números e as operações entre eles. De acordo com sua visão de mundo, a Divindade, o criador do universo, é soberano em termos de cálculo matemático (Cabrera, 1992). A matemática maia fornece a capacidade de realizar operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação, divisão e cálculo de raízes simples, como a cultura maia foi capaz de sintetizar a quantidade de três símbolos e conseguiu sintetizar sistema baseado em valor posicional vinte (Calderon, 1966). Em este artigo se procura fazer um reconhecimento dos numerais maias, sua concepção metafórica e algumas operações aritméticas.

Palavras-chave: numeral maia, metáfora, adição, multiplicação.

Introducción

En este artículo se muestran algunos aspectos de la aritmética del pueblo maya, con el ánimo de contribuir a la difusión de este conocimiento ancestral. Los Mayas, usando granos de maíz de dos colores, piedras y varas de madera para representar los numerales del 1 al 5, y colocando estos objetos en una cuadrícula dibujada en el suelo —en la tierra o en la arena— podían llevar a cabo, en corto tiempo, complejas operaciones matemáticas utilizando los algoritmos fundamentales de la aritmética (Calderón, 1966).

La importancia de los granos de maíz para hacer las cuentas puede constatarse en el Popol Vuh, donde Ixpiyacoc e Ixmucané —la pareja de sabios abuelos—, antes de la formación del humano, hacen una adivinación por medio de unos extraños cálculos utilizando granos de maíz y de tzité "echen la suerte con granos de maíz y de tzité" (Anónimo, 1997, p. 21).

La difusión de esta temática en nuestros contextos se justifica como una contribución a la recuperación de los símbolos ancestrales de los pueblos americanos. Dado que "el uso de los símbolos como expresión del poder de una cultura que conquista, sobre otra que es conquistada y sometida. La cultura subyugada se ve obligada a adoptar y usar toda la simbología que trae la cultura conquistadora" (Fernández y Angulo, 2010, p. 208), y los libros de texto que se usan para dar clases de matemáticas en las escuelas de la mayoría de países de América Latina, enseñan aritmética con símbolos traídos de la cultura Indoeuropea.

La temática tratada aquí se enmarca teóricamente desde la perspectiva del programa Etnomatemática del Dr. Ubiratan D'Ambrosio (1987), quien a partir de la década de los años setenta, muestra gran preocupación por aspectos inherentes al conocimiento matemático, como es, su dimensión política, el devenir histórico de dicho conocimiento y sus implicaciones pedagógicas, para lo cual promueve el hacer investigaciones sobre los conocimientos que se producen en el seno de las relaciones que se dan dentro de las comunidades diferenciadas cultural y socialmente, así como las formas en que esos conocimientos producidos se difunden entre los miembros jóvenes de dicha comunidad. El conocimiento matemático de los pueblos latinoamericanos, y en particular el de los mayas, ha sufrido de un desplazamiento para dar lugar al conocimiento matemático que traían los europeos y que fue impuesto a nuestros pueblos de manera forzada.

Para los mayas, la matemática va mucho más allá de las superficiales simbolizaciones mediante puntos y barras y las operaciones con dichas representaciones. Según su cosmovisión, la Deidad, la creadora del universo, es soberana en cuanto al cálculo matemático y como lo cuestiona Cabrera "¿Cómo si no poder establecer las medidas y equilibrios tan a la perfección, de tal manera que permitan la existencia de los astros, sus movimientos tan exactamente calculados, los balances químicos y físicos del universo?" (1992, p. 263).

Contenido

Los numerales mayas

Los mayas para representar sus numerales utilizan únicamente tres símbolos (figura 1). Un punto, para describir cantidades de una a cuatro unidades; una raya para representar cinco unidades y una forma ovalada para el cero, "el magnífico descubrimiento en este campo del intelecto maya para la humanidad" (Cabrera, 1995, p. 205).

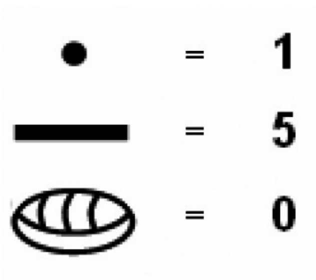


Figura 1. Numerales básicos mayas

Fuente: Duque (2013, p. 62)

Respecto a poseer un sistema de numeración, la cultura maya ha sido "la civilización que universalmente ha logrado el más alto grado de abstracción" (Cabrera, 1995, p. 205).

Los símbolos que aparecen en la figura 1, son los más sencillos; los escribas mayas, usaban estos símbolos junto con los glifos para nombrar los kines (días) y los winiles (meses de 20 kines) (Grube, 2006) para registrar fechas en los llamados códices (figura 2).

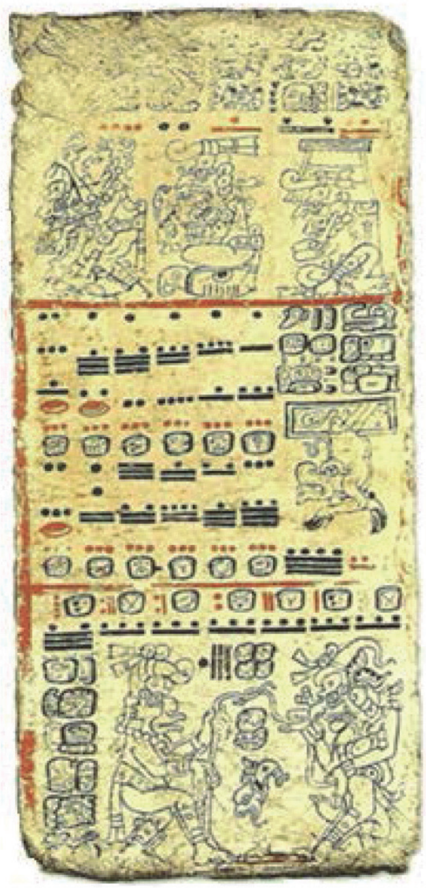


Figura 2. Página 44 del Códice Dresde, pintura sobre papel amate, medio de almacenamiento de información Maya

Fuente: Fahsen y Matul (2007, p. 94)

La característica más sobresaliente de estos símbolos es que tienen un valor intrínseco, según Calderón (1966, p. 15) "en sí mismos contienen la multiplicidad que describen", es decir, con el numeral es fácil identificar el número, pues si un punto es el numeral de la unidad, dos puntos serán el numeral del número dos, o una raya con un punto encima describen como numeral el número seis, una raya con dos puntos encima, el número siete, y así sucesivamente.

Calderón (1966, p. 25), comenta que "el maya sólo precisaba recoger un puño de gravillas, cortar una vara, trazar con ella una cuadrícula en el suelo y después romperla en trozos convenientes". Los mayas utilizaron, además de puntos y rayas, una forma más estética de representar los números, mediante glifos en forma de cabeza o cefalomorfos, también glifos en forma de cuerpo entero (figura 3).

Figura 3. Números cefalomorfos

Fuente: tomado de Pitss (2008, Lib. 2, pp. 36-41, citado en Duque, 2013, p. 66)

Para el maya cada número es sagrado, cada glifo cefalomorfo tiene su significado expresando alguna relación con la naturaleza. Es importante resaltar el cambio notorio en la escritura de los números cefalomorfos a partir del diez —representación del mundo de abajo— cuya característica principal es que todos llevan claramente la mandíbula sin carne.

Cabrera (1995, pp. 206-209 citado en Duque, 2013, p. 67), da una descripción de los elementos característicos en los números cefalomorfos de la siguiente manera:

Número	Elemento
1	Más de un elemento en la frente
2	Tocado en forma de mano o puño y signo SAK (blanco)
3	Turbante y signo IK
4	Ojos cuadrados, diente, lengua saliente hacia atrás y signo KIN (flor)
5	Símbolo TUN (año) sobre la cabeza
6	Ojo con cruz como hacha
7	Tira que pasa de la frente a la oreja por debajo del ojo
8	Sólo un adorno en la frente
9	Circulo de puntos en la mejilla, a veces barba. Signo YAX (primero)
10	Hueso descarnado de mandíbula
11	Signo Cabán
12	Coronado o tatuado con el glifo cielo
13	Mandíbula descarnada. Nariz muy ganchuda. Ojo con lengüeta. Colmillo y turbante IK
14	Mandíbula descarnada. Ojos del cuatro
15	Mandíbula descarnada. Turbante del símbolo TUN
16	Mandíbula descarnada. Ojo con cruz
17	Mandíbula descarnada. Tira bajo el ojo
18	Mandíbula descarnada. Un adorno en la frente
19	Símbolo del nueve
20	Lleva la mano en la barbilla

Concepción metafórica de los numerales mayas

La inclusión de la palabra metáfora en un tema matemático no deja de causar extrañeza, pero Lizcano brinda una justificación cuando dice que "por ser las matemáticas uno de los ámbitos donde la imaginación menos se somete a las restricciones de la llamada realidad, ofrece una de las vías más francas para acceder al fondo imaginario de los pueblos y las culturas" (Lizcano, 2006, p. 41), y agrega que es en la metáfora donde el imaginario se refleja más fielmente, es decir, la metáfora es aquello en que la letra, la palabra o la imagen se soportan, pues es a través de estos elementos comunicativos que el imaginario se hace evidente (Lizcano, 2006, citado en Fernández, 2010, p. 177).

Sobre la metáfora

Sobre la metáfora, dice Perelman (1997) que ésta "es una analogía condensada, gracias a la fusión del tema y del foro. Tomando como base la analogía: A es a B como C es a D, surgen las metáforas: "A de D", "C de B"; "A es C". Por ejemplo, de la analogía "la vejez es a la vida lo que la noche es al día", se derivan las metáforas: "la vejez del día", "la noche de la vida" o "la vejez es una noche"" (Perelman, 1997, citado en Fernández, 2010, p. 179).

Para Serna, la metáfora "en su concepción original, como trasteo de atributos de un campo semántico a otro, las metáforas inducen una ontología rizomática, cuando saltan de lo concreto a lo abstracto, del animal al hombre, de la naturaleza a la cultura, de los elementos a los sentimientos, para citar algunos casos; cuando desordenan las parcelaciones del horizonte del sentido laboriosamente construidas por la academia" (Serna, 2007, citado en Fernández, 2010, p. 179).

Lakoff y Johnson en (1995) explican el origen de las metáforas llamadas orientacionales y ontológicas. Ellos afirman que las primeras surgen de las experiencias básicas de la orientación espacial humana, y que "nuestras experiencias con objetos físicos (especialmente nuestros propios cuerpos) proporcionan la base para una variedad extraordinariamente amplia de metáforas ontológicas, es decir formas de considerar acontecimientos, actividades, emociones, ideas, etc., como entidades y sustancias" (p. 64).

Concepción metafórica de los numerales mayas

El cero es representado por los mayas de varias maneras, esto se deduce al observar las estelas —rocas alargadas en forma de prisma con base rectangular— que se encuentran en las ruinas de ciudades mayas, como la de la figura 5. Pertenece al período llamado clásico tardío. La inscripción que aparece corresponde a una cuenta calendárica. En el dibujo, a la derecha de la foto, se puede observar que la fecha que aparece esculpida está encabezada en su parte superior con una figura que los expertos llaman "glifo introductor", debajo de este aparece la fecha propiamente dicha, registrada en doble columna que se lee de arriba hacia abajo: 9 bak'tun, 16 k'atun, 1 tun, 0 winik y 0 k'in, que en términos occidentales corresponde al 29 de abril del año 752 d. C. (Grube, 2007). Para las estelas usaban inscripciones para representar el cero como los de la figura 4.

Figura 4. Representaciones del cero en las estelas

Fuente: Matul y Cabrera (2007, p. 232).

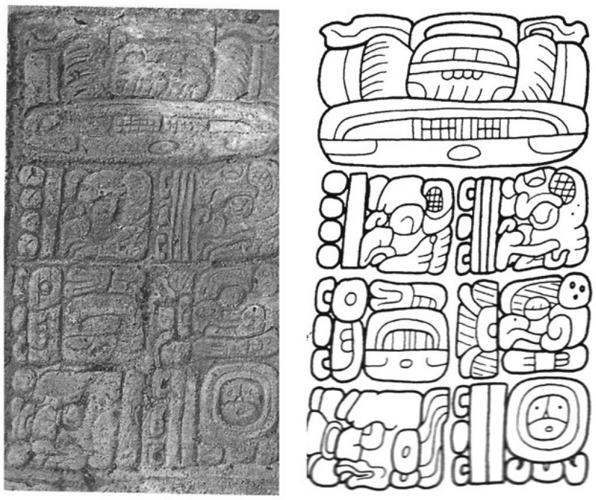


Ilustración 5. Estela 11 de Yaxchilán y su transcripción

Fuente: Grube (2007, p. 139)

La representación del cero usada inicialmente en forma de flor incompleta y luego completa, para hacer las inscripciones en las estelas, expresa en sus cuatro pétalos el cosmos con sus cuatro puntos cardinales. Cuando Huracán o Corazón del Cielo, inicia la construcción del Universo, lo que hace inicialmente es medir y construir las cuatro direcciones, con sus respectivos ángulos (Cabrera, 2007, citado en Fernández, 2010, p. 184).

La figura de media flor de cuatro pétalos representa lo incompleto de la creación, cuando sólo se había creado la categoría espiritual, y faltaba la material, como lo da a entender el autor del Popol Vuh (Anónimo, 1997), cuando expresa que el equilibrio entre estas dos categorías acabadas de crear, es determinado con la creación del ser humano del maíz, aquel que le dará el equilibrio necesario para la buena marcha del Universo.

Al representar el cero y asumirlo como concha de molusco, o caracol, se expresa que se ha completado la unidad matemática, el ciclo de 20 unidades se ha completado, por lo tanto, es necesario pasar a una categoría superior. Con esto debe ser claro que el numeral para el cero indica la existencia de una categoría llena —a diferencia del vacío denotado por el numeral en Occidente— y sobre esta categoría como base se construye una nueva entidad, pero sin destruir lo anterior (Cabrera, 1997).

El numeral para la unidad como un punto representa una semilla de maíz o de fríjol, y a su vez como semilla representa el mundo subterráneo. Los mayas observaron que la semilla de maíz cuando se siembra, se tarda, en promedio, cinco días para germinar y que empiece a brotar una nueva planta, es por este hecho que este cinco es representado por el perfil de la tierra con una barra horizontal, así el cinco representa el mundo de en medio, donde habitan los Mayas y el cero representa el nivel espiritual, está asociado con el mundo de arriba. Tres símbolos matemáticos para los tres niveles ceremoniales: el mundo de abajo o Xibalba como también lo llaman, la Tierra, como mundo de en medio y el Cielo, como mundo de arriba (Cabrera, 1997).

El sistema de numeración maya es en base veinte, esto ve expresado en el vocablo Hun Uinic, en lengua Maya-K'iché, para referirse a veinte unidades, que en maya-yucateco, se escribe Hun Winic, y en las dos lenguas se usa para referirse a "un ser humano" (Cabrera, E. 1997, citado en Fernández, 2010, 186).

> De esto se sigue que para ellos ser humano y veinte unidades es igual, es decir, 20 unidades entonces son 20 dedos, los posibles unos que puede representar un ser humano con sus dedos. Las direcciones básicas del cosmos son cuatro, al igual que el número de extremidades del ser humano; el centro más las cuatro direcciones da el cinco, y cinco son los dedos en la mano del ser humano, por cuatro extremidades, resulta el veinte, como el número cabalístico que constituye una unidad humana. La pareja, mujer y hombre se unen en un veinte entrelazado y amoroso del cual surge un nuevo ser humano, que representa un nuevo veinte, una nueva categoría matemática, llena de esperanza que le aportará bien a la humanidad y para la gloria de las energías cósmicas (Cabrera, 1997, citado en Fernández, 2010, p. 186).

Según Cabrera en (1997), para la representación en forma vertical y el valor ascendente de los numerales, los mayas tuvieron en cuenta que el Sol respecto a la humanidad se mueve de abajo hacia arriba, alcanzando su mayor esplendor en el cenit, por ejemplo para representar el número 11206, se escribe como en la figura 6, y se lee de abajo hacia arriba, aumentando el valor a medida que se asciende en los niveles de representación.

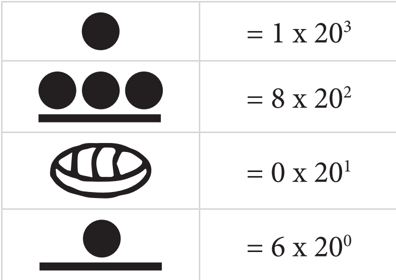


Figura 6. Representación de 11206 unidades en numerales mayas

Fuente: elaboración propia a partir de Coulter (2006) y Calderón (1966)

Algunas operaciones aritméticas con numerales mayas

En esta sección se ilustrará la forma como, según Calderón (1966), los mayas efectuaban sumas y multiplicaciones, usando semillas de maíz o frijol, pedacitos de varitas de madera que tomaban del bosque y trazaban una cuadrícula en el suelo.

La suma

La operación de la suma se explicará con el siguiente ejemplo: se desea sumar las cuatro cantidades que aparecen en las cuatro columnas de la cuadricula en la figura 7(a). Para esto se reúnen en la primera columna conservando la fila en la que se encuentran, todos los frijoles y palitos. Queda como en la ilustración 7(b). Enseguida se aplican dos reglas para los numerales que se derivan de la notación posicional en sistema vigesimal. Esta reglas son: cada que se reúnan cinco frijoles, se cambian por un palito y por cada cuatro palitos en una casilla, se cambian por un frijol la casilla en el nivel superior (figura 7 d). Los numerales que se suman en el ejemplo corresponden a los numerales indo-arábigos 152, 40667, 173 y 2404.

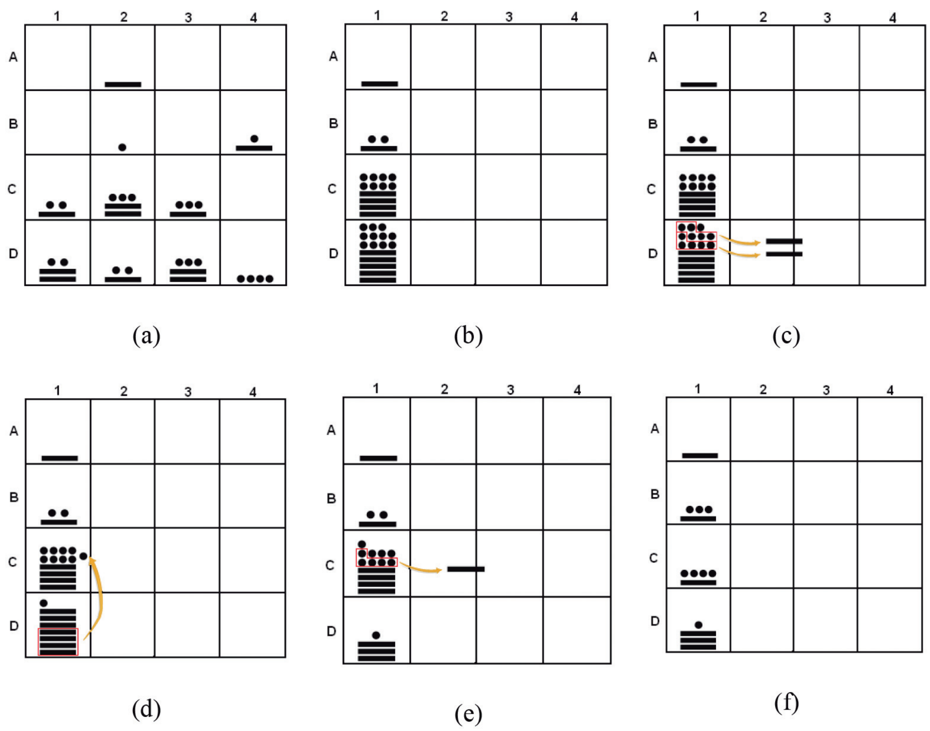


Figura 7. Suma de cuatro números al estilo maya. (a) Cuatro numerales verticales. (b) Se reúnen semillas y palitos de cada fila en la columna 1. (c) Diez frijoles se cambian por dos palitos en el mismo nivel. (d) Cuatro palitos en D1 se cambian por un frijol en el nivel C1. (e) Cinco frijoles se cambian por un palito en el mismo nivel. (f) Después de cambiar cuatro palitos en C1 por un frijol en B1, se obtiene el resultado, que corresponde al numeral indo arábigo 43396.

Fuente: elaboración propia a partir de Duque (2013, pp. 69-73)

La multiplicación

Aquí se muestra con un ejemplo la forma como, según Calderón (1966), los mayas efectuaban la multiplicación. Entre los números que se ilustran abajo y cuyo equivalente en números arábigos es 902 y 26425 respectivamente, a lo largo del margen izquierdo y del margen superior del tablero se colocan los marcadores correspondientes a los dos factores, de tal forma que las posiciones de mayor rango queden más cerca de la esquina superior izquierda. En caso de que alguno de los números tenga más cifras, se deja un espacio vacío (cero) por cada cifra faltante en el número con menos cifras, luego se llena cada casilla con el producto parcial de los guarismos correspondientes a cada fila y su respectiva columna, y enseguida se simplifica este resultado, cambiando cada grupo de cinco frijoles por un palito y cada grupo de cuatro palitos por un frijol en la posición inmediatamente superior. Este proceso comienza en la posición más baja de cada columna (figura 8) y b). Por último, se procede a juntar los frijoles y palitos sobre la diagonal principal del tablero, siguiendo igualmente la regla de cambiar cada grupo de cinco frijoles por un palito y cada grupo de cuatro palitos por un frijol en la posición inmediatamente superior. Este valor en notación arábiga es 23835350, que es el resultado de la multiplicación (figura 8 c).

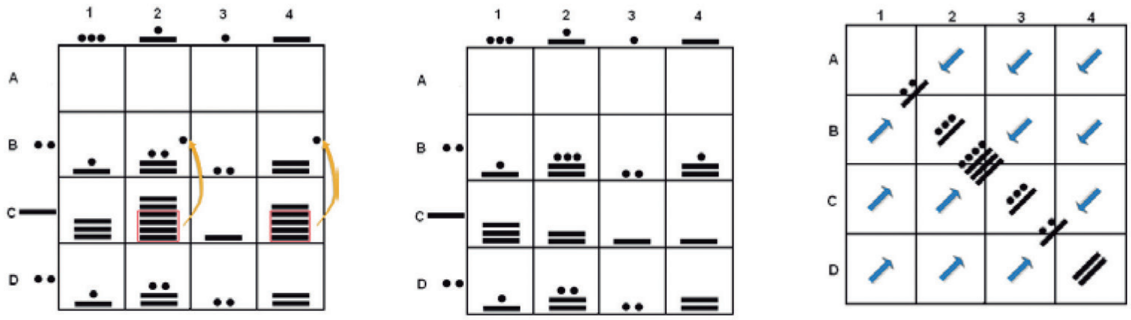


Figura 8. Multiplicación de dos números al estilo maya. (a) Un grupo de cuatro palitos en C2 y otro en C4 se convierte en un punto en B2 y B4, respectivamente. (b) Productos parciales simplificados en el tablero. (c) Agrupación sobre la diagonal principal para obtener el producto final

Fuente: elaboración propia a partir de Duque (2013, pp. 74-76)

Conclusiones

En este artículo se mostró una manera alternativa de trabajar las operaciones aritméticas. Así mismo, se ilustra cómo la cultura ancestral de los Mayas logró, con tan sólo tres símbolos, representar números de grandes magnitudes en una forma con la cual se pueden efectuar operaciones como la suma, y sobre todo, la multiplicación entre números grandes, sin necesidad de las tradicionales tablas de multiplicar, con las cuales muchas generaciones fueron formadas. Lo cual muestra que la simbología constituida por los numerales de la cultura indoeuropea y usados en las clases de matemática, en las escuelas latinoamericanas, no son únicos, sino que también existen desde antes del desigual encuentro de dicha cultura con los pueblos latinoamericanos, y que por cuestiones de poder, fueron impuestos a los pueblos dominado. En muchos aspectos, numerales como los del pueblo maya, son más funcionales didácticamente, pues como lo anota Calderón (1966), la característica más sobresaliente de los numerales mayas es que tienen un valor intrínseco, según él (p. 15) "en sí mismos contienen la multiplicidad que describen", es decir, con el numeral es fácil identificar el número, pues si un punto es el numeral de la unidad, dos puntos serán el numeral del número dos, y así sucesivamente.

A diferencia de los numerales indoarábigos de Occidente, los numerales del pueblo Maya, tienen un significado estrechamente relacionado con sus creencias, su concepción del universo y la forma como se relacionan con el medio natural y social, lo que hace que la aritmética tenga sentido para los niños mayas. Un sentido del que carecen los numerales indoarábigos que se enseñan a los niños en las escuelas latinoamericanas.

Las investigaciones de Calderón (1966), muestran que cualquier individuo del pueblo maya, en cualquier lugar que estuviese, tenía a su disposición su propia "calculadora", bastaba con desgranar una mazorca o recoger del suelo un puñado de piedritas y partir una esterilla en varios pedacitos para sumar, restar, multiplicar o dividir, cualquier cifra, no importa lo grande que fuese.

Referencias

Anónimo. (1997). *Popol Vuh, Antiguas Historias del Quiché de Guatemala*. Bogotá: Panamericana.

Cabrera, E. (1992). Cosmogonía Maya. En *La Cosmovisión Maya* (Vol.1 y 2). Guatemala: Liga Maya.

Cabrera, E. (1995). Calendario Maya. En *La Cosmovisión Maya* (Vol.2). Guatemala: Liga Maya.

Calderón, H. (1966). *La Ciencia Matemática de los Mayas.* México, D. F.: Orión.

Coulter, L. (2006). *Secretos en Piedra, Todo Sobre los Jeroglíficos Mayas*. Ciudad de Guatemala: Piedra Santa.

D'Ambrosio, U. (1987). Etnomatemáticas: ¿Qué podrán ser? Una recapitulación y reconsideración. En *Boletín del Grupo Internacional de Estudios sobre Etnomatemática (ISGEm). 3* (1). Acceso: febrero de 2011. Recuperado de: http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm

Duque, H. (2013). *El sentido del número en la cultura Maya*. Tesis de maestría. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Fahsen, F y Matul, D. (2007). *Los Códices de Dresde, París y Grolier.* Guatemala: Liga Maya de Guatemala. Amanuense.

Fernández, O. (2010). Pensamiento Matemático de los Mayas, una creación metafórica. *Entre Ciencia e Ingeniería, (8),* 174-188.

Fernández, O. y Angulo, M. (2010). El símbolo matemático como expresión de poder. *Scientia et Technica, (44),* 207-210.

Grube, N. (2006). *Mayas, una Civilización Milenaria*. Barcelona: Könemann.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1995). *Metáforas de la vida cotidiana*. (Trad. de Carmen González Marín). Madrid: Cátedra.

Lizcano, E. (2006). *Metáforas que nos Piensan. Sobre Ciencia, Democracia y otras Poderosas Ficciones*. Ediciones Bajo Cero, licencia de Creative Commons.

Perelman, Ch. (1997). *El Imperio Retórico, Retórica y Argumentación*. (Trad. de Adolfo León Gómez). Bogotá: Norma.

Pitss, M. (2008). *Libro 1: Escribir con grifos Mayas*. (The Aid and Education Proyect). Acceso: Noviembre de 2012. Recuperado de: http://www.famsi.org/spanish/research/pitts/GlifosMayasLibro1.pdf

Pitss, M. (2008). *Libro 2: Los números Mayas y el calendario Maya*. (The Aid and Education Proyect). Recuperado en noviembre de 2012, de http://www.famsi.org/spanish/research/pitts/GlifosMayasLibro2.pdf

Serna, J. (2007). *Ontologías Alternativas. Aperturas de Mundo desde el Giro Lingüístico*. Rubí, Barcelona: Anthropos y Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Perspectivas para formar profesores de matemáticas: disminuyendo la brecha entre la teoría y la práctica[1]

Prospects for training teachers of mathematics: Bridging the breach between theory and practice

Perspectivas para formar professores de matemáticas: diminuindo a infracção entre a teoria e a prática

Fecha de recepción: diciembre de 2013

Fecha de aceptación: julio de 2014

Sandra Evely Parada Rico[2]

Jorge Enrique Fiallo Leal[3]

Resumen

En este artículo se analizan algunas acepciones sobre la problemática de la formación inicial y continuada de profesores de matemáticas. Se plantea la necesidad de posibilitar experiencias y espacios de aprendizaje en los programas de formación y de actualización de docentes, en los que se reflexione sobre las prácticas del aula y problemáticas educativas reales, esto con el fin de disminuir la brecha entre las teorías y las prácticas profesionales. A partir de resultados de investigación se proponen alternativas de formación como: 1) en la formación inicial las tutorías académicas universitarias como práctica docente pueden aportar en el desarrollo del pensamiento reflexivo de los futuros maestros; así mismo, la vinculación de estos en investigaciones los puede proyectar como educadores matemáticos, y 2) para el desarrollo profesional, se plantea la necesidad de construir espacios de trabajo colaborativo como puede ser al interior de comunidades de práctica.

Palabras clave: formación de profesores, formación inicial, desarrollo profesional, tutoría entre pares, comunidad de práctica.

Abstract

In this paper exhibit some meanings on the problems related to the initial and continuing training of mathematics teachers, this raised the need for training programs and educational update enable experiences and learning spaces which reflect on the practices of classroom and real educational problems, this in order to reduce the gap between theories and practices. From research results proposed training alternatives such as: i) in the initial training teaching practice through academic tutoring university can

1 Artículo de investigación.

2 Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). Contacto: sparada@matematicas.uis.edu.co

3 Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). Contacto: jfiallo@uis.edu.co

contribute to the development of reflective thinking (in terms of Parada, 2011) of prospective teachers, also linking of these investigations can be projected as the mathematics educators, and ii) for professional development, there is a need to build collaborative work spaces such as within communities of practice.

Keywords: Teacher training, training, professional development, peer mentoring, community of practice.

Resumo

Este trabalho apresentam alguns significados sobre os problemas relacionados com a formação inicial e continuada de professores de matemática, este levantou a necessidade de programas de capacitação e atualização educacional permitir experiências e espaços de aprendizagem que refletem sobre as práticas sala de aula e os problemas educacionais reais, isso a fim de reduzir o fosso entre teorias e práticas. Para este fim os resultados de alternativas de formação em investigação são propostos: i) na formação inicial e prática docente universitário tutoria acadêmica pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento reflexivo (em termos de Parada, 2011) de futuros professores , da mesma forma que liga estas investigações podem ser projetadas como os educadores matemáticos , e ii) para o desenvolvimento profissional , há uma necessidade de construir espaços de trabalho colaborativos , como no seio das comunidades de prática.

Palavras-chave: formação de professores, formação inicial, desenvolvimento profissional, tutela entre pares, comunidade de prática.

Introducción

La formación de profesores en matemática es un campo en el que se ha centrado la atención en los últimos tiempos, esto obedece a que la comunidad académica precedió investigaciones de tipo: curricular, cognitivo, didáctico entre otros; para interiorizar y comprender que, en los resultados de las líneas antes mencionadas, es el maestro quien lleva la "batuta" en los procesos de enseñanza y aprendizaje del área.

La formación de profesores de matemáticas se constituye en un amplio y profundo campo de estudio que necesita pensarse desde sus dos grandes ejes: 1) el de la formación inicial de profesionales que van a ser maestros; y 2) el desarrollo profesional de quienes ya están desempeñándose como docentes del área. En la figura 1 se presenta un esquema de la problemática relacionada con la formación de docentes de matemáticas en Colombia. Lo que vislumbra la necesidad de un estudio consciente sobre currículos que respondan a las necesidades básicas para que el futuro maestro pueda enfrentar diversas situaciones en sus clases de matemáticas. Desde el desarrollo profesional se requiere una amplia reflexión de las instituciones u organizaciones —oficiales, privadas y de ciencias— que promueven permanentemente la actualización de los profesores que ya están desempeñándose como docentes de matemáticas, aún cuando pudieron no haberse formado profesionalmente para ello.

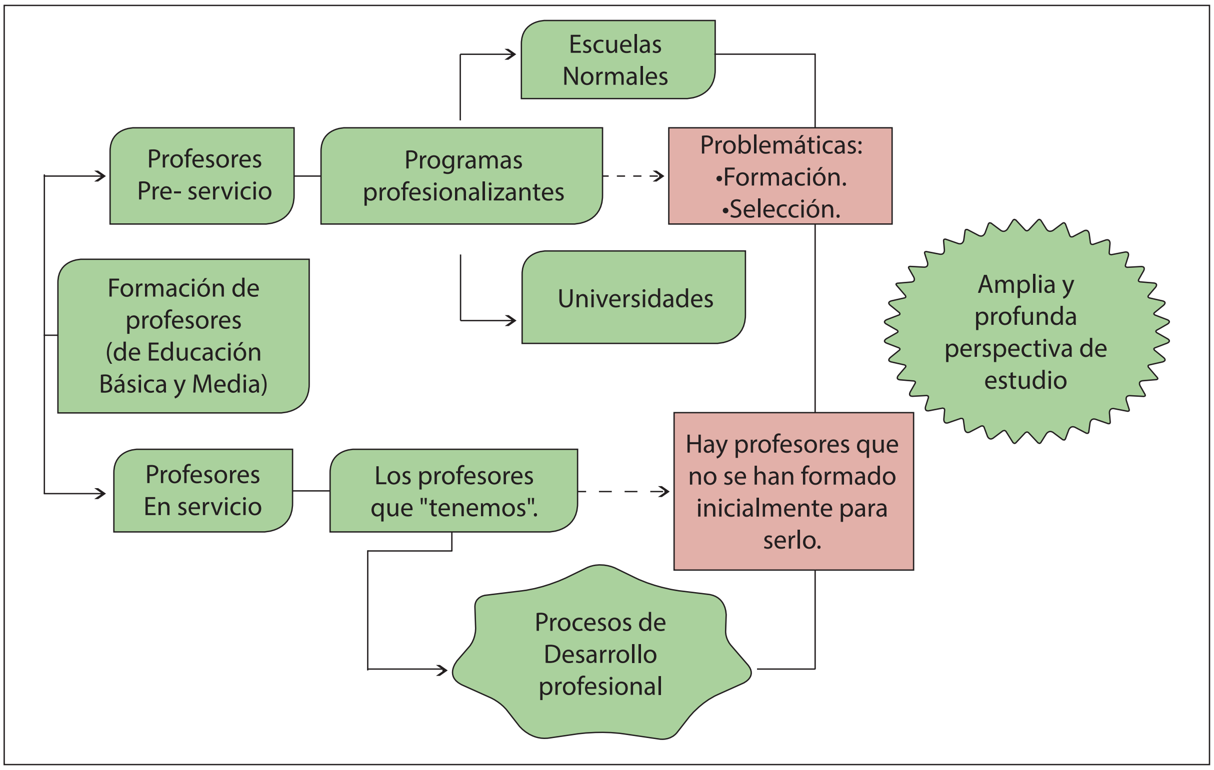


Figura 1. Una mirada de la problemática de formación de profesores de matemáticas

Buscando disminuir la brecha entre la teoría y la práctica en la formación inicial de profesores

En los programas de formación inicial de docentes en matemáticas se han empleado diferentes modelos. Por ejemplo, Rico (2004) dice que, en España, los planes de formación no consideran las necesidades de formación propias de los profesores de matemáticas, además faltan criterios sobre los conocimientos necesarios y el marco teórico adecuado para ejercer satisfactoriamente la profesión. Por su parte Azcárate y Cardeñoso (1998) hablan de cómo las concepciones de los profesores en formación pueden convertirse en obstáculos, por lo que sugieren que los formadores deben incidir en aquellas concepciones elaboradas por los estudiantes para el profesor a partir de sus experiencias propias, las cuales, en algunos casos no permiten evolucionar hacia formas más complejas de comprensión e intervención en la realidad educativa.

Modelos de formación inicial de profesores de matemáticas

Son diferentes los reportes que tratan sobre los modelos o programas de formación inicial, en los cuales se vislumbra una preocupación permanente por la relación e integración entre el conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico y el conocimiento didáctico (Gómez, 2004). Se encuentran diversos trabajos para referirse a la práctica, el uso de relatos y el uso de las tecnologías digitales. El trabajo de Chapman (2005) sugiere que la escritura de relatos e historias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y las reflexiones que el profesor en formación realice contribuyen a la formación. De modo que emplea los relatos para que los profesores en formación realicen una diferenciación entre lo que habían previsto para la clase y lo que observaron en ella.

En Gónzalez (2010) se encuentra un modelo didáctico para formación inicial que se fundamenta en: el modelo conceptual sobre el aula, los principios didácticos, los fines educativos y la práctica escolar. Mientras Alsina (2010) plantea un modelo de formación inicial que se fundamenta en la aplicación del aprendizaje reflexivo para aprender a enseñar matemática. En tanto que Kosheleva, Medina, e Ioudina (2007) proponen un modelo donde los profesores en formación incorporan en su formación las tabletas y las tecnologías digitales para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Competencias a desarrollar en los futuros profesores de matemáticas

Para algunos investigadores es esencial que los estudiantes que se preparan para ser profesores de matemáticas posean competencias que les permitan tener un buen desarrollo en el ejercicio de su profesión. No obstante, como lo expresa Llinares (2007) algunas de esas competencias no logran alcanzarse durante sus estudios universitarios, puede que se alcancen después de empezar a ejercer la enseñanza o cuando se realicen estudios de actualización docente. Por ello, el desarrollo profesional es una acción complementaria a la formación inicial, para que así se realice una actualización permanente de los profesores de matemáticas y puedan mejorar la calidad de la enseñanza.

Recio (2004) describe las competencias generales que deben desarrollarse desde la formación inicial, estas son:

> i) Dominio de los contenidos matemáticos de educación secundaria desde una perspectiva matemática superior y su conocimiento como objetos de enseñanza-aprendizaje; ii) la organización curricular y planificación de estos contenidos matemáticos para su enseñanza; iii) el análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas; y iv) la capacidad de gestión del contenido matemático en el aula (p. 35).

Otras competencias generales del profesor de matemáticas que propone Rico (2004) son: 1) organizar el contenido matemático para enseñarlo; 2) analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos; y 3) gestionar el contenido matemático en el aula. De dichas competencias se determinan competencias específicas las cuales se enuncian a continuación:

> i) Conectar los contenidos matemáticos de la educación secundaria con los fenómenos que los originan (de situaciones cotidianas y de ámbitos multidisciplinares; ii) conocer diversas teorías de aprendizaje del conocimiento matemático; iii) analizar críticamente y evaluar propuestas curriculares; iv) reconocer los tipos de razonamiento de los estudiantes, proponer tareas que los orienten; v) seleccionar y secuenciar actividades para el aprendizaje escolar; vi) diseñar, seleccionar y analizar unidades didácticas, textos y recursos; vii) disponer de criterios, técnicas e instrumentos específicos para la evaluación del conocimiento matemático; viii) reconocer recursos y materiales (computacionales, audiovisuales, manuales, bibliográficos,

etc.) y emplearlos adecuadamente en la enseñanza; ix) utilizar técnicas de comunicación para dotar de significado los conceptos matemáticos; y x) favorecer las potencialidades matemáticas de los estudiantes.

Socialmente, el aula de matemáticas delimita un ambiente complejo lleno de diversas interacciones promotoras del aprendizaje, por ello, es importante que los profesores iniciales sepan qué *saber matemático* deben enseñar en cada nivel bajo la directriz de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2005) en el contexto colombiano. Además, deben tener claro por qué enseñar unos contenidos y destrezas y no otros, qué secuencia seguir, cómo distribuir el tiempo; debe tener criterios para ser agentes críticos y reflexionar sobre su quehacer docente en pos de autoevaluarse para que elija estrategias de cambio que le permitan mejorar.

En Colombia las universidades que tienen programas de licenciatura en matemáticas o enseñanza de las matemáticas cuentan con dos grandes líneas de estudio: la línea de las matemáticas y la línea de las didácticas —incluyendo aquí materias sobre pedagogía, psicología, currículo y evaluación—, estas además se conjugan al final del plan de estudios en prácticas docentes, que en ocasiones construyen sobre procesos artificiales, alejándolos así de las prácticas reales del aula.

Tutorías entre pares como puente entre la práctica artificial y la práctica real de maestros en formación

Con el interés de establecer un puente entre la práctica real y la práctica artificial que viven los profesores en formación, Botello y Parada (2013) presentan una propuesta en la que los alumnos-maestros funjan como tutores en cursos de los primeros niveles universitarios. En dicho estudio se postulan los programas de tutorías como un laboratorio académico, en el cual los alumnos-docentes pueden desarrollar su pensamiento didáctico y su pensamiento matemático escolar, en términos de Parada (2011).

Del trabajo experimental realizado por Botello y Parada (2013) con tutores y los estudiantes de cálculo diferencial, se ha encontrado que el programa de tutorías es una oportunidad para que los tutores confronten y mejoren sus conocimientos adquiridos. Además, identifican aprendizajes que pueden emerger de este proceso tanto desde el pensamiento matemático como el didáctico, entre ellos:

- Del pensamiento matemático

a. Posibilita recordar contenidos del cálculo.

b. Posibilita reaprender contenidos del cálculo diferencial que no habían quedado completamente claros o estaban mal aprendidos.

c. Posibilita aprender contenidos que nunca se vieron o aprendieron en su formación matemática.

- Del pensamiento pedagógico y didáctico

a. Aporta experiencia para identificar problemas de aprendizaje de los contenidos del curso.

b. Aporta experiencia para identificar problemas de enseñanza de los contenidos del curso.

c. Aporta experiencia en el dominio grupal y en la atención a estudiantes.

Aunque las tutorías representan una responsabilidad mayor para los alumnos-docentes pues les implica trabajar con estudiantes universitarios y con una asignatura compleja —como lo es el cálculo diferencial—, estos manifiestan que su experiencia es tanto de enseñanza-aprendizaje del cálculo, y que ésta les permitió vislumbrar un poco de lo que será su práctica real.

Proyección hacia una formación investigativa

Font (2002) plantea que la formación de los futuros profesores debe examinar los resultados de investigaciones en Educación Matemática, este autor menciona que por medio de las reflexiones sobre la enseñanza de la matemática se les permite a los profesores en formación a:

> i) Tomar conciencia sobre la existencia de parámetros y variables que condicionan las situaciones de enseñanza; ii) conocer la existencia de concepciones, representaciones en los alumnos, y conocer los efectos de estas concepciones; iii) saber que los obstáculos en el aprendizaje no provienen todos de los propios alumnos, sino frecuentemente del propio concepto a enseñar, o de las elecciones didácticas llevadas a cabo por el propio profesor; iv) concientizarse de sus propias representaciones y concepciones y de su posible influencia en la enseñanza; v) conocer, o al menos tratar de aproximarse, a la explicación de los errores de los alumnos, acercarse a lo que estos errores muestran sobre la estructura cognitiva de los alumnos; vi) saber lo que se puede pedir a los investigadores en didáctica (p. 3)

Es por ello que la reflexión no debe limitarse a algo ajeno e intangible al profesor en formación sino que, por el contrario, se deben analizar situaciones prácticas utilizando algunas herramientas generadas por los distintos programas de investigación que se han desarrollado en el área de conocimiento Didáctica de las Matemáticas, una manera de hacerlo es involucrándolos en procesos de investigación.

Desde esta perspectiva, se pudo desarrollar un estudio por Suárez y Rojas (2013) en el que ellas, como profesoras en formación, se involucraron en una investigación de tipo curricular desarrollada por Parada (2013) en la que se analizan —entre otros aspectos— las competencias matemáticas con las que ingresan los estudiantes a la Universidad. En dicho estudio, estas futuras maestras desarrollaron una investigación cualitativa que tuvo como objetivo diseñar experiencias que posibilitaron el desarrollo de habilidades comunicativas en estudiantes de once grado, y analizar como dichas habilidades contribuyen en el progreso de su pensamiento algebraico. Entendiendo por habilidades comunicativas la capacidad que tienen las personas de expresar sus ideas hablando y escribiendo, de comprender, de interpretar y de sustentar ideas; además de formular preguntas, y producir argumentos persuasivos y convincentes (MEN, 1998).

Para la consecución de dicho objetivo se diseña e implementa un plan de intervención alrededor de la habilidad para interpretar y la habilidad para explicar con estudiantes de once grado de una institución pública. Las reflexiones resultantes de la aplicación de las actividades posibilitaron un avance en el desarrollo de dichas habilidades en los estudiantes que participaron del plan de intervención, donde ellos reconocieron la importancia de la traducción de expresiones en sus diferentes representaciones para la resolución de problemas.

Pero ¿qué caminos abren estas perspectivas para los futuros maestros?, específicamente, esta perspectiva de formación docente:

- Posibilita espacios para fortalecer las herramientas docentes —matemáticas y didácticas— para los procesos de enseñanza y aprendizaje de su práctica actual y futura.

- Abre caminos para continuar con el "perfeccionamiento" docente —postgrados en profundización—, para que coadyuven en procesos de construcción y no de reproducción de la labor docente.
- La participación en estudios educativos les permite comprender fenómenos en los que se verán inmersos como docentes.
- Aporta herramientas para participar en futuros proyectos curriculares y de desarrollo.
- Abre perspectivas y plantea interrogantes para continuar la formación como investigadores —postgrados de investigación—.

Proceso de desarrollo profesional

A pesar del reconocimiento de la gran relevancia que tiene en el desarrollo profesional de los docente en ejercicio, tanto en los procesos de profundización o actualización, es de conocimiento consensual que, aunque la mayoría de los programas de desarrollo profesional —diplomados, especializaciones, maestrías en educación— son planeados para atender las necesidades actuales de los maestros, éstos se encuentran limitados por tiempo, programas y evaluaciones. Es por ello, que muchos programas formales de desarrollo profesional dejan ciertos vacíos, tanto de conocimientos de la matemática escolar, como de conocimientos pedagógicos y didácticos, por lo que no logran satisfacer las necesidades reales de los profesores.

En la literatura relacionada con la formación de profesores de matemáticas, se puede observar que varios de los estudios en esta área se enfocan en el análisis de los conocimientos matemáticos y concepciones de los profesores, así como en el estudio de sus actitudes y creencias, debido a la relación que algunos investigadores establecen entre cómo se comprende y enseña la matemática, y el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, Thompson (1992) estudió las relaciones entre los conocimientos, concepciones y creencias de los maestros. Investigadores como Fennema y Loef (1992), Grossman, Wilson y Shulman (2005), Llinares y Krainer (2006), entre otros, han centrado su interés en conocer y comprender los conocimientos matemáticos con los que cuentan los maestros.

Otras investigaciones sugieren que, para mejorar la comprensión del profesor, son útiles las experiencias de reflexión de, y con, profesores; entre ellas se pueden mencionar las de Flores (2007)) y Kwon y Orrill (2008) que muestran evidencias de que la reflexión sobre la experiencia profesional, como podría darse dentro de comunidades de práctica —ver abajo—, contribuye al desarrollo de los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los profesores en servicio.

Algunas investigaciones presentan una perspectiva sociocultural para situar los aprendizajes adquiridos a través de prácticas profesionales y de interacciones sociales. Muchas de ellas se enfocan en los aprendizajes construidos por los profesores a través de su participación en una comunidad de práctica o CoP. Entre ellas, las de Llinares (2000), Jaworski (2008) y Parada (2009) mencionan que las discusiones entre maestros, o maestros en formación, favorecen una mayor comprensión de la experiencia profesional de quienes participan y apoyan su crecimiento profesional. Así mismo, Parada señala la importancia de los procesos de seguimiento y acompañamiento permanente dentro del desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

También, Lave y Wenger (1991) hablan de lo que representa aprender en función de la participación en comunidades de práctica (CoP), en la que se comparten e intercambian conocimientos y experiencias. Así mismo, para Harris (2008), en la formación de profesionales en general, no se logran abarcar los conocimientos necesarios para resolver los problemas propios de la práctica —en nuestro caso, de la práctica docente—, creándose vacíos cognitivos que él considera se pueden llenar mediante participación en las CoP: los profesionales en las CoP pueden hacer conexiones rápidamente para conseguir respuestas a preguntas que necesitan contestar.

Comunidades de práctica y desarrollo profesional

Parada (2011) presenta un modelo de desarrollo profesional —modelo R-y-A, de Reflexión-y-Acción— en el que se propone el trabajo colaborativo al interior de comunidades de práctica (CoP) como espacios permanentes y favorables para la reflexión sobre la práctica docente y por ende para el mejoramiento del desempeño del profesor en el aula. En dicho modelo retomó la definición de comunidades de práctica de Wenger (1998), quien dice que éstas están conformadas por un grupo de personas que comparten preocupaciones e intereses comunes, y que profundizan y construyen de manera colaborativa conocimiento. Para este autor, una CoP se caracteriza por tener un compromiso mutuo; y por ser una empresa conjunta y compartir un repertorio.

En el modelo R-y-A (Parada, 2011) se plantea la conformación de CoP de educadores matemáticos —profesores de matemáticas, investigadores, autoridades educativas y otros interesados en el mejoramiento de la educación matemática— asumiendo que en el desarrollo profesional de los docentes se debe propiciar la concurrencia de conocimientos —científicos, técnicos, pedagógicos, entre otros— y experiencias. Así, si los maestros exponen sus vivencias de enseñanza y en el aula, a investigadores y colegas con mayor experiencia, es posible que desarrollen ideas, conocimientos y alternativas concretas para mejorar su práctica docente.

Modelo de Reflexión-y-Acción en una CoP de Educadores Matemáticos

El modelo Reflexión-y-Acción (R-y-A) de Parada (2011) pretende ser una guía metodológica para impulsar y favorecer el desarrollo profesional de profesores que participan en CoP de educadores matemáticos. Wenger (1998) sustenta que una CoP se caracteriza por: 1) el compromiso mutuo, 2) la empresa conjunta y 3) el repertorio compartido. En este estudio, se enfoca el análisis de los datos desde la perspectiva del desarrollo de un repertorio compartido, con el cual los profesores tienen la oportunidad de participar en la actividad matemática propuesta. Buysse, Sparkman y Wesley (2003) definen una CoP como un grupo de profesionales y otros interesados que buscan una empresa de aprendizaje compartido, normalmente centrado en un tema en particular. Es este el caso de estudio presente, pues se conforman las CoP entre diferentes actores interesados en la educación matemática. Se incluyeron a las autoridades educativas, ya que éstas necesitan conocer los fenómenos de estudio y comprenderlos para que apoyen las alternativas generadas por los profesores.

Pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas

Según Vega (1990), el pensamiento es una actividad global del sistema cognitivo que ocurre siempre que el humano se enfrenta a una tarea o problema, con un objetivo y un cierto nivel de incertidumbre sobre la forma de realizarla. El modelo R-y-A enfatiza en que la formación de profesores debe apuntar al desarrollo de un pensamiento reflexivo, en el que se privilegien los saberes adquiridos por cada maestro en el trayecto de su práctica y en las maneras como usen dichos saberes para resolver los problemas cognitivos, didácticos, tecnológicos, sociales y de otro tipo, que suelen darse en el aula. No obstante, se reconoce la complejidad de la labor y, como ya se ha mencionado, se descompone dicho pensamiento en tres partes:

1. Pensamiento matemático escolar. Al respecto Shulman (1987) enfatiza que para enseñar, en primer lugar, hay que comprender críticamente el conjunto de ideas que van a enseñarse. El modelo R-y-A establece una diferencia entre el *pensamiento matemático* y el *conocimiento matemático,* para explicar que, más allá de que el profesor sea un experto en el área, éste necesita usar sus saberes matemáticos para conducir la actividad matemática en el aula.

2. Pensamiento didáctico de la matemática escolar. Ball, Hill y Bass (2005) destacan la necesidad de trabajar las relaciones entre el conocimiento matemático y pedagógico en la formación de docentes de matemáticas. Desde esta perspectiva, el pensamiento didáctico del profesor de matemáticas se da cuando éste cuestiona las diferentes maneras de acercar los estudiantes a los contenidos matemáticos, buscando las formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones que permitan hacerla más comprensible a los alumnos.

3. Pensamiento orquestal. Inspirados por Trouche (2004) y su idea de orquestación, se plantea como metáfora la idea de que el maestro necesita hacer las veces del conducir su clase como lo hace el director de una orquesta. El modelo R-y-A caracteriza el pensamiento orquestal del profesor de matemáticas en torno a la conducción de su clase —reflexión-en-la acción—, y en torno a las maneras como usa los recursos que ha seleccionado para favorecer la actividad matemática que tiene prevista.

Actividad matemática

La matemática como actividad de resolución de problemas introduce en muchos casos un componente fundamental: la matematización. Matematizar, según Treffers (1987), es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificando los aspectos matemáticos relevantes, descubriendo regularidades, relaciones y estructuras. El interés de analizar la actividad matemática del profesor es identificar las condiciones necesarias del pensamiento reflexivo de éste, para que logre conducir la apropiación por parte de los estudiantes.

Procesos de reflexión

El modelo también considera tres procesos de reflexión, y estos son: 1) reflexión-para-la acción, la cual se hace presente en la relación de la matemática escolar y el profesor, cuando éste planifica la actividad matemática esperada por parte de los estudiantes en la clase; 2) reflexión-en-la acción, ésta se da en la clase, en los intercambios entre el profesor y los estudiantes en torno al contenido matemático de estudio y; 3) reflexión-sobre-la acción, la cual se da después de la clase cuando el maestro evalúa la actividad matemática que había planeado comparada con la actividad matemática que logró.

¿Cómo influyen los aprendizajes construidos en CoP en los profesores en ejercicio?

En el transcurso de la investigación realizada por Parada (2011) se pudo ver cómo los significados negociados en las CoP influyeron en las prácticas profesionales, especialmente de los profesores y autoridades educativas que participaron frecuentemente en las actividades de la comunidad. De acuerdo a las prácticas profesionales que redefinieron a a partir de los ejercicios propios de la actividad docente que proponen Ponte y Serrazina (2004), se puede señalar que:

- Los aprendizajes pueden influir en *las maneras de proponer tareas* por parte de los profesores participantes, pues para la mayoría de los maestros no es una costumbre planear sus clases. Los maestros a través del trabajo en comunidad valoran la selección y diseños de actividades para lograr la actividad matemática esperada.
- En la práctica de *seleccionar, usar y diseñar recursos*, los maestros construyen significados críticos sobre los recursos con los que cuentan.
- Se fortalece la interpretación crítica de los materiales oficiales y se *logran adaptaciones o modificaciones curriculares.*
- *Las actividades de análisis sobre las maneras de comunicación en el aula* sugirieren la autorreflexión de los maestros en dicho aspecto.
- En relación con la *evaluación, las actividades en las Co*P ayudan a los maestros a asumirla de manera más formativa, tanto para ellos como para sus estudiantes.
- La práctica de *colaboración* se ve favorecida pues los maestros más participativos terminan fungiendo como formadores de otros colegas.
- El modelo R-y-A se puede convertir en una alternativa o complemento para la práctica de *profesionalización,* fueron evidentes los significados negociados y cosificados a través del proceso.

Reflexiones finales

Es importante destacar la importancia de que los estudios sobre formación de profesores cuenten con amplias y conscientes lecturas de los fenómenos de estudio desde la matemática educativa, para evitar emitir juicios arriesgados de los docentes o plantear propuestas "milagrosas" que amplíen la brecha entre la teoría y la práctica.

La formación de profesores va más allá de aportar un cúmulo de conocimientos teóricos, una lista de estrategias de enseñanza o una serie de "nuevos" recursos didácticos. La actualización y desarrollo profesional requiere aprovechar los conocimientos adquiridos por los profesores a través de su experiencia docente y posibilitar espacios de acompañamiento y seguimiento permanente, en los que se promuevan procesos de reflexión sobre sus acciones docentes.

Las investigaciones que ha desarrollado Parada (2009, 2011) alrededor de los procesos de *reflexión-acción* —antes durante y después de la clase— han mostrado que éstos favorecen el entendimiento y concientización de los maestros sobre sus prácticas y la actividad matemática que promueven en sus aulas. Así mismo, el proceso individual de reflexión de los profesores se ve enriquecido a través de la comunicación y socialización de experiencias. Es por ello que deben fortalecerse proyectos curriculares en las instituciones formadoras de profesores en los que los futuros maestros puedan experimentar prácticas reales. Además, la conformación de *comunidades de práctica* pueden ser espacios de aprendizaje de los maestros, en los cuales las reflexiones personales y colectivas pueden provocar "un efecto de palanca" elevando y fortaleciendo sus procesos de desarrollo profesional, así como su confianza y competencias docentes.

Referencias

Alsina, Á. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, *22*(1), 149-166.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. (1998). La formación inicial de profesores de matemáticas, finalidades, limitaciones y obstáculos. *Investigación en la Escuela, (35),* 76-85.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, Fall*.

Botello y Parada (2013) Tutorías entre pares: una oportunidad de formación para futuros profesores de matemáticas. *Revista Científica* (edición especial), 135-139.

Buysse, V., Sparkman, K. and Wesley, P. (2003). Communities of practice: Connecting what we know with what we do. *Exceptional Children*, *69*(3), 263-278.

Chapman, O. (2005). Stories of Practice: A Tool in Preservice Secondary Mathematics Teacher Education. En *The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia*.

Fennema, E. y Loef, M. (1992). Los conocimientos de los profesores y su impacto. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas Reflexivos: Formación y Cuestiones de Investigación. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *1*(4), 139-159.

Font, V. (2002). Una propuesta dialógica sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros de educación primaria. En G. Perafán, y A. Adúriz (Eds.), *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Gómez, P. (2004). Diversidad en la formación inicial de profesores de matemáticas en la búsqueda de un núcleo común. *Revista EMA, 10*(1), 242-293.

González, F. (2010). Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de matemática. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, 11*(1), 47-59.

Grossman, P., Wilson, S. y Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: El conocimiento de la materia para la enseñanza. Profesorado. *Revista de Currículo y Formación de Profesorado*, *9*(2), 1-24.

Harris, Ch. (2008.) *Learning & Innovation in communities of practice.* Recuperado en mayo de 2009, de http://www.pyramidodi.com/papers/CoPs.pdf

Jaworski, B. (2008). Building and Sustaining Inquiry Communities in Mathematics Teaching Development. In K. Krainer, T. Woods (Eds.), *Participants in Mathematics Teachers Education* Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Kosheleva, O., Medina, A. y Ioudina, V. (2007). Preservice teacher training in mathematics using tablet PC technology. *Institute of Mathematics and Informatics, 6*(2), 231-334.

Kwon, N.Y. y Orrill, Ch. H. (2008). A comparison study of a teacher's reflection. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and*

XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME, 1.

Lave, J. y Wenger (1991). *Situated learning: Legitimate peripherical participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte, J.P. y Serrazina, L. (Coord.), *Educação matemática em Portugal*, Espanha e Italia. Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotherdam/Taipei: Sense Publichers.

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. *Memorias de la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Granada, Universidad de Alicante.

Ministerio de Educación Colombia. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá, Colombia.

Parada, S. (2009). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases* (Tesis de maestría inédita). México: Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN.

Parada (2011). Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional. Tesis de doctorado inédita. México: Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN.

Parada, S. (2013)Alternativas curriculares para atender la problemática relacionada con el curso de cálculo diferencial de la Universidad Industrial de Santander. En Roa, S., Fiallo, J. y Parada, S. (Eds.). *Memoria del 4o Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación*. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Ponte, J. P. y Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, *13*(2), 51-74.

Recio, T. (2004). Seminario: Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas. *La gaceta de la RSME*, *7*(1), 33-36.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de currículum y formación del profesorado*, *8*(1) 1-15.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-21.

Suárez, R. y Parada (2013) Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus habilidades comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad. *Revista Científica* (edición especial). Universidad Distrital. Bogotá.

Thompson, A. (1992). Teachers´ beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In Grows, D.A. (Ed.), *International Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, USA: Macmillan Publishing Company.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education. The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Trouche, L. (2004) Managing Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Student's Command Process Through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3) 281- 307.

Vega, M. (1990). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza.

Wenger, E. (1998*). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Modelo matemático y simulaciones numéricas para un problema de frontera libre ecológico

Mathematical model and numerical simulations for a free boundary problem of ecological

Modelagem matemática e simulação numérica de um problema de frontera libre em ecología [1]

Fecha de recepción: diciembre de 2013

Fecha de aceptación: julio de 2014

Deccy Trejos Ángel[2]

Óscar Ramírez Céspedes[3]

Resumen

En este artículo se estudia una aproximación numérica del Problema de Frontera Libre (PFL) de un sistema de ecuaciones diferenciales de tipo parabólico unidimensional, asociado con la evolución de la interface, que describe la partición regional de dos grupos de individuos de una misma especie que interactúan en un límite espacial para obtener sus propios hábitats y que es a priori totalmente desconocido. Considerando la dinámica local del sistema, el esquema implícito de diferencias finitas es utilizado, obteniendo así un sistema algebraico no lineal de ecuaciones en cada paso de tiempo. Finalmente, algunas simulaciones de la distribución de densidad poblacional y de la evolución de la frontera libre conforme al tiempo son exhibidas en diferentes escenarios, en base a un algoritmo propuesto e implementado en MATLAB, esto permite validar el modelo matemático PFL.

Palabras clave: dinámica poblacional, modelo matemático, frontera libre, método de diferencias finitas, algoritmo.

Abstract

In this paper, we study a numerical approximation Free Boundary Problem (FBP) of a system of differential equations of nonlinear one-dimensional parabolic type, associated with the evolution of the interface, which describes the regional partition of two groups of individuals in a same species interacting in a spatial limit to obtain their own habitat and that is a priori completely unknown. Taking into account the local dynamic of the system, the implicit finite difference scheme is used, obtaining a

1 Artículo de Investigación.

2 Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia). Contacto: dytrejosa@udistrital.edu.co

3 Universidad Federal de Goiás, Goiânia (Brasil). Contacto: oscarexud@hotmail.com

nonlinear algebraic system of equations in each time step. Finally, some simulations of the distribution of population density and the evolution of the free boundary are displayed according to the time in different scenarios, based on an algorithm proposed and implemented in MATLAB, this validates the mathematical model FBP.

Keywords: Population dynamics, mathematical model, free boundary, finite difference method, algorithm.

Resumo

Neste trabalho, estuda-se uma aproximação numérica do Problema de Fronteira Livre (PFL) de um sistema de equações diferencias do tipo parabólico unidimensional, associado com a evolução da intefase, que descreve a partição regional de dois grupos de indivíduos de uma espécie que interatuam em um limite espacial para obter seus próprios habitats e que a priori é totalmente desconhecido. Tendo em conta a dinâmica local do sistema, o esquema de diferencias finito é utilizado, obtendo assim um sistema algébrico não linear de equações em cada passo do tempo. Finalmente algumas simulações numéricas da distribuição espacial e da evolução da fronteira livre conformo ao tempo são exibidas em diferentes cenários, em base a um algoritmo proposto e implementado em MATLAB, isso valida o modelo matemático PFL.

Palavras-Chave: dinâmica populacional, modelo matemático, fronteira livre, método de diferenças finitas, algoritmo.

Introducción

En matemática, el primer estudio sobre lo que, en el presente, se denomina frontera libre, se le atribuye a Lamé y a Clapeyron en 1831, quienes buscaron las soluciones explícitas para el proceso de solidificación de un globo líquido (Lamé y Clapeyron, 1831). Stefan estudió nuevamente este tipo de problemas en sus trabajos sobre el crecimiento del espesor del hielo en el agua a bajas temperaturas (Stefan, 1889). Ese problema es conocido en matemática como el problema de Stefan y frecuentemente se utiliza para explicar el concepto de frontera libre.

Un fenómeno interesante en la dinámica de poblaciones es la partición regional de las especies como el caso de dos grupos de animales que interactúan en un punto —interfase o frontera intermedia— para obtener sus propios hábitats.

Para modelar el caso unidimensional de esta situación, se asume que los grupos son de la misma especie con funciones de densidad poblacional u_1 y u_2, y estos se encuentran sometidos a la dispersión — k_1 y k_2 coeficientes de dispersión, es la velocidad con la cual se expande cada grupo y está dado en unidad de longitud^2/unidad de tiempo— y a un crecimiento logístico. Además, están ubica-dos en $(0, h(t))$ y $(h(t), l)$ respectivamente, donde el punto que separa ambas regiones es la frontera libre del problema, las densidades en ese punto son iguales y es totalmente desconocida.

Para modelar matemáticamente la dinámica en torno de la frontera libre, se asume que, desde hasta habrá fluido a través de una cierta cantidad de densidad poblacional; luego, por la Ley de conservación de la masa (Murray, 2002) se tiene:

$$\int_t^{t+\Delta t} \varphi(h(t), \tau)\, d\tau = \text{Densidad de u1 que atraviesa en } x = h(t) = \int_{h(t)}^{h(t+\Delta t)} u1\,(x, t+\Delta t)\, dt$$

Aplicando el teorema del valor medio, se obtiene:

$$\Delta t\varphi(h(t), \hat{\tau}) = (h(t+\Delta t) - h(t))\, u_1\, (\hat{x}, t+\Delta t), \qquad (1)$$

Donde, $h(t) \leq x \leq h(t+\Delta t)$ y $t \leq \tau \leq t + \Delta t$.

Ahora reemplazando la Ley de Fick (Murray, 2002) en (1), resulta:

$$-k1(\Delta t)u_{1x}\,(h(t),\tau) = (h(t+\Delta t) - h(t))u_1(x,t+\Delta t) \qquad (2)$$

De este modo, tomando el límite se tiene:

$$-k_1 u_{1x}\,(h(t),t) = h'(t)u_1(h(t),t). \qquad (3)$$

Realizando un razonamiento análogo para , entonces queda formulado el Problema de Frontera Libre (PFL) que describe la interface entre dos grupos de individuos de una misma especie, asumiendo que no existe entrada ni salida de flujo por las fronteras fijas ($x = 0$ y $x = l$),

$$\begin{cases} u_{1t} - k_1 u_{1xx} = a_1 u_1(1 - u_1/K_1), & 0 < x < h(t) \\ u_{2t} - k_2 u_{2xx} = a_2 u_2(1 - u_2/K_2), & h(t) < x < l \\ u_1 = u_2, \quad u_1 h'(t) = -k_1 u_{1x} = -k_2 u_{2x}, & x = h(t) \\ u_{1x}(x,0) = u_{2x}(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) > 0, & 0 \leq x \leq l \\ h(0) = b, & 0 < b < l \end{cases} \qquad (5)$$

Donde, $u0 \in C^2\,[0, b]$, $n\; C^2[b, l]$, $ku'_o \in C^1[0, l]$ y $u'_0(l)$ (cerca de la interfase los flujos y las densidades de las poblaciones son continuos).

Los términos, u_t y u_{xx} denotan la primera derivada parcial respecto a la variable temporal t y la segunda derivada parcial con respecto a la variable espacial x, respectivamente de $u(x, t)$. La primera y segunda ecuación de (5) del lado izquierdo de la igualdad, es conocida como *ecuación de dispersión-reacción* (Murray, 2003) y establece que la población se expande, sin acumularse en ningún lugar en particular, es decir, los individuos se dispersan en la región y se espera que cuando sea uniforme, esto es, que las densidades de las poblaciones tienden a las fronteras fijas respectivamente, las ecuaciones del lado derecho de la igualdad representa el crecimiento logístico (Murray, 2002) de ambos grupos, mientras que la tercera ecuación de (5) establece que una proporción de individuos del grupo uno pasa al grupo dos y viceversa, pero la cantidad total de individuos se conserva.

Kwang Ik Kim y Zhigi Lin mostraron en el artículo “A free boundary problem for a parabolic system describing an ecological model” que este modelo está bien planteado y demostrando existencia y unicidad de la solución (Kim y Lin, 2009).

Problema de frontera libre discreto

Sin pérdida de generalidad, se define:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & si \quad 0 < x < h(t) \\ u_1(x,t) = u_2(x,t), & si \quad x = h(t) \\ u_2(x,t), & si \quad h(t) < x < l \end{cases} \tag{6}$$

Luego, el sistema parabólico (5) con frontera libre se puede reescribir como,

$$\begin{cases} u_{t-}k_1 u_{xx} = a_1 u(1 - u/K_1), & 0 < x < h(t) \\ u_{t-}k_2 u_{xx} = a_2 u(1 - u/K_2), & h(t) < x < l \\ uh'(t) = -k_1 u_x = -k_2 u_x, & x = h(t) \\ u_x(x,0) = u_x(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) > 0, & 0 \leq x \leq l \\ h(0) = b, & 0 < b < l \end{cases} \tag{7}$$

Para hallar la solución del sistema (7) se usa el método numérico implícito de diferencias progresivas (Burden y Faires, 2003), primero se inicia discretizando el dominio espacial $[0, l]$ por medio de una partición uniforme $2M$ - 1 con subintervalos disjuntos, cuya distancia está dada por $h = \frac{1}{2M}$, entonces la partición está definida por $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{2M} = l$

De forma análoga se discretiza el tiempo $[0,T_f]$ tomando en consideración un tiempo final T_f por una partición uniforme con distancia $K = \frac{T_f}{N}$ donde $t_j = j(j-1)K$.

Sea R la malla que consta de $2MXN$ nodos de la forma (x_i, t_j), es decir:

$R = \{(x_i, t_j); i = 1:2M, j = 1:N\}$,

Donde M y N son enteros positivos.

Para resolver numéricamente (7), se calculan las aproximaciones a los valores exactos $u(x,t)$en los puntos de la malla: $\{u^j_i \approx u(x_i, t_j); = 1:2M, j = 1:N\}$, obteniendo el siguiente sistema:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{k}\left[u_i^{j+1}-u_i^j\right]-\frac{k_1}{h^2}\left[u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j\right]-a_1u_i^{j+1}\left[1-\frac{u_i^{j+1}}{K_1}\right]=0, & i=2:h(j+1)-1\\
\frac{1}{k}\left[u_i^{j+1}-u_i^j\right]-\frac{k_2}{h^2}\left[u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j\right]-a_2u_i^{j+1}\left[1-\frac{u_i^{j+1}}{K_2}\right]=0, & i=h(j+1)+1:2M-1\\
\frac{k_2}{h}\left[h_{j+1}-h_j\right]=\frac{k_1}{h}\left[u_{h(j)}^j-u_{h(j)-1}^j\right], & h(j)=2:2M-1\\
u_i^1=u_0(x_i), \quad i=1:2M & \\
u_2^j=u_1^j, \quad u_{2M}^j=u_{2M-1}^j &
\end{cases}
$$

Simulaciones numéricas

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones no lineales escrito en la sección 2, se emplea el método de Newton-Raphson (Mathews y Fink, 2008) y para visualizar la simulación, se usó el paquete matemático MATLAB 7.1.

Se han tomado los siguientes parámetros hipotéticos de la literatura (Murray, 2003), (Okubo y Levin, 2002) y se colocó una población inicial uniformemente distribuidos en [0, *l*]dado por $u_0(x)$ = -1,2 cos(x) + 1,3 ya que satisface las condición del artículo (Kim y Lin, 2009), la tasa de crecimiento para u_1 y u_2 dados por a_1 = 0,82/año y año, respectivamente. Se simulará la distribución de la densidad poblacional para los dos grupos en tres escenarios, variando los valores de la capacidad de carga con el mismo coeficiente de dispersión k1 = k_2 = 0,714 km^2/año y cuando se varía la posición de la frontera libre en el instante , esto es:

Escenario 1. Capacidades de carga iguales $k_1 = k_2$ = 10 individuos/año: figura 1. 2 y 3.

Escenario 2. Capacidades de carga diferentes k_1 = 7 <K_2 = 10 individuos/año: figuras 4, 5 y 6.

Escenario 3. Capacidades de carga diferentes individuos/año: figuras 7, 8 y 9.

Las siguientes simulaciones corresponden a valores diferentes de los coeficientes de dispersión y con capacidades de carga iguales:

Escenario 4 y 5. Coeficiente de dispersión diferente k_1 = 0,179 < k_2 = 0,714 km^2/año y k_1 = 0,714 > k_2 = 0,179 km^2/año, respectivamente y capacidades de carga iguales individuos/año: figuras 10, 11 y 12 para el escenario 4 y figuras 13, 14 y 15 para el escenario 5.

Los colores cálidos —amarillo, naranja y rojo— y los colores fríos —verde, azul y morado— que se visualizan en las siguientes figuras indican respectivamente densidad poblacional progresivamente mayores y menores.

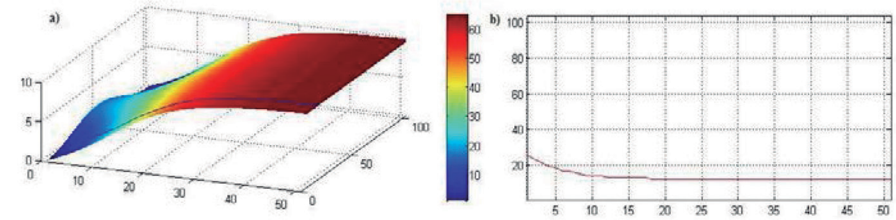


Figura 1. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

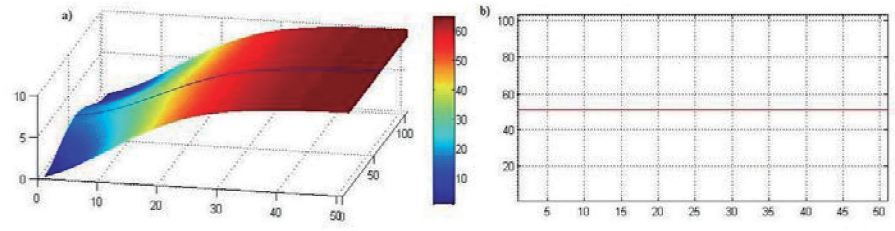


Figura 2. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0) = \pi$. b) Gráfica de la frontera libre

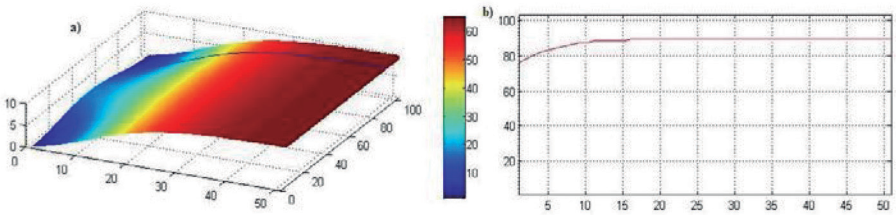


Figura 3. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{3\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

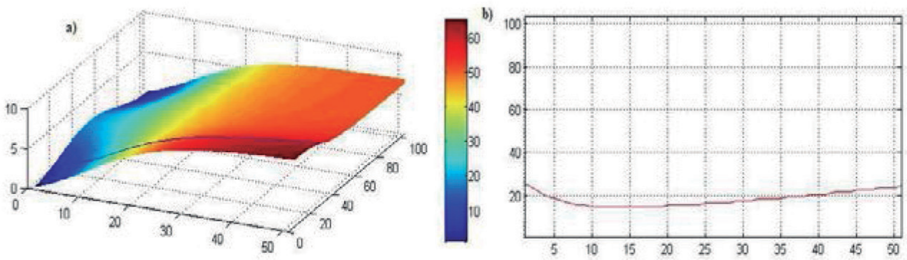


Figura 4. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

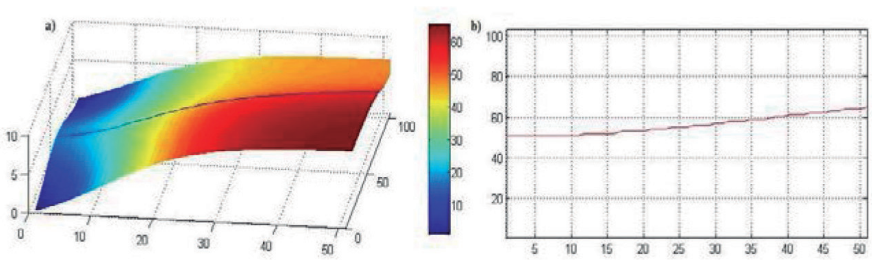


Figura 5. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0) = \pi$. b) Gráfica de la frontera libre

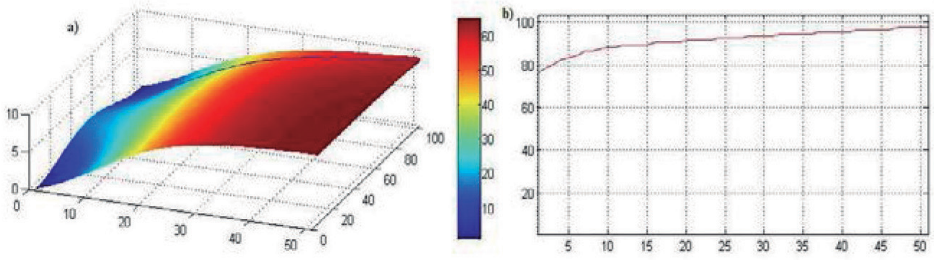


Figura 6. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{3\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

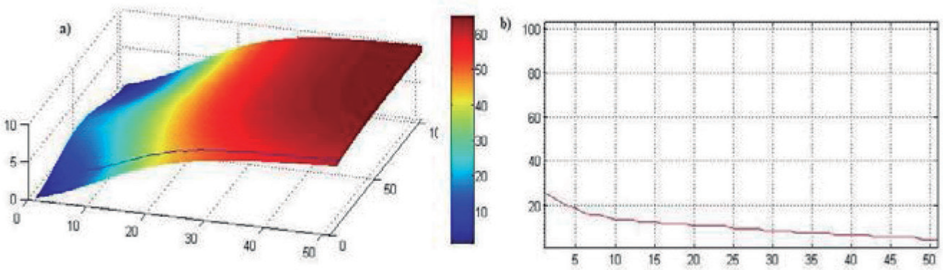


Figura 7. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

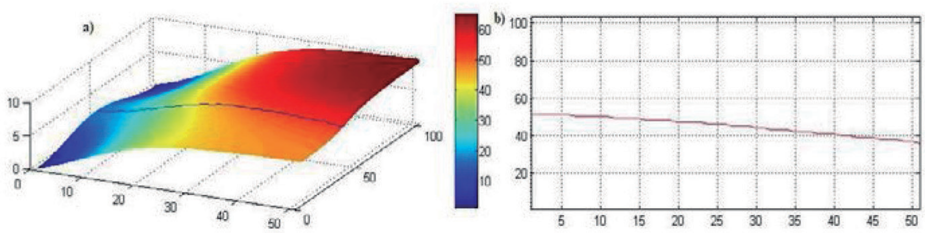


Figura 8. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0) = \pi$. b) Gráfica de la frontera libre

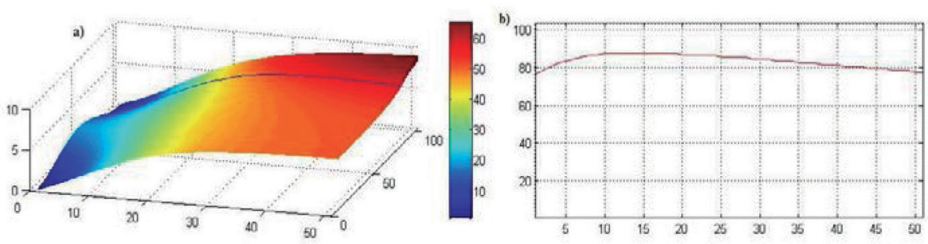


Figura 9. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{3\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

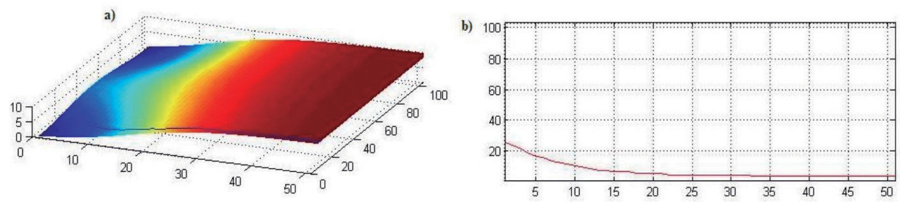


Figura 10. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

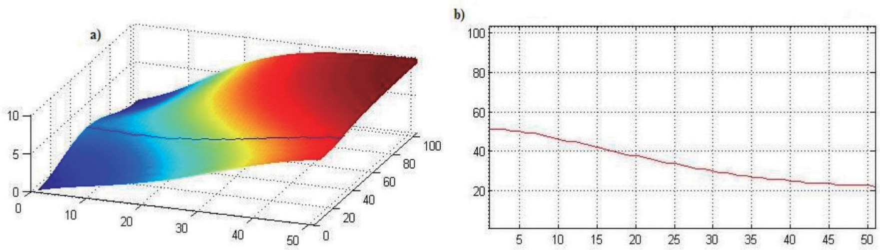


Figura 11. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con h(0) = π. b) Gráfica de la frontera libre

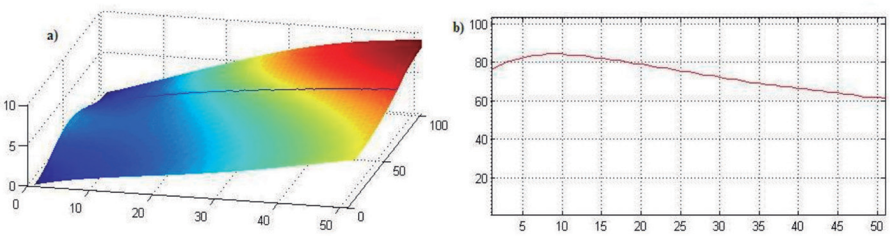


Figura 12. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{3\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

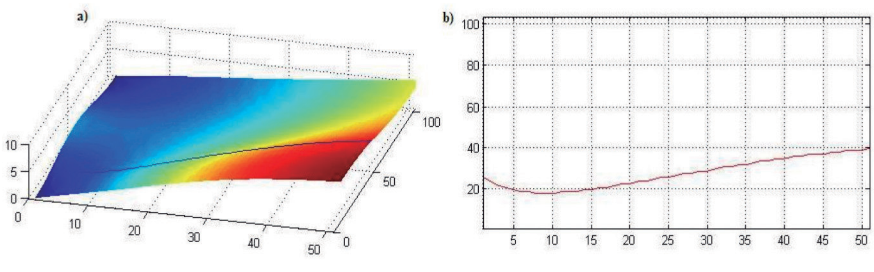


Figura 13. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

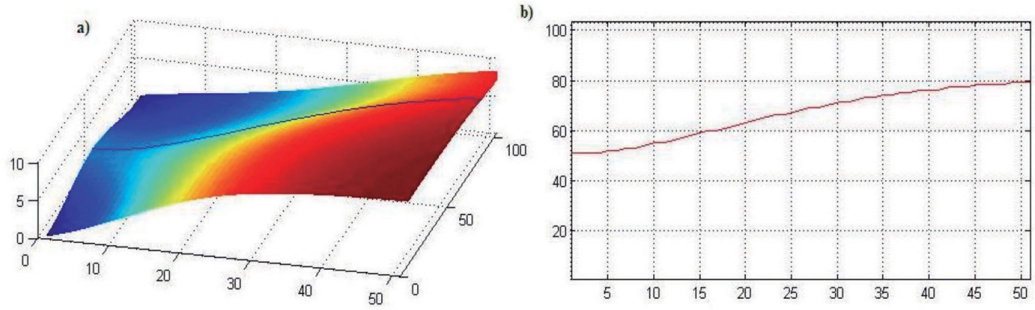


Figura 14. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con h(0) = π. b) Gráfica de la frontera libre

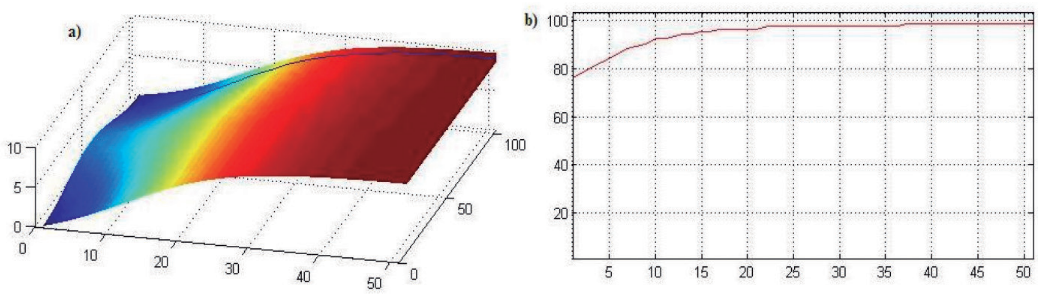


Figura 15. a) Dinámica de la distribución de las poblaciones con valor inicial de la frontera libre con $h(0)=\frac{\pi}{2}$. b) Gráfica de la frontera libre

Discusión y resultados

Comparando los resultados presentados en los tres primeros escenarios considerados y variando la posición inicial de la frontera libre, se visualiza que, a través de este punto de frontera libre, se está presentando una relevante transferencia de densidad poblacional y un aumento de la región ocupada por uno de los grupos. Sin embargo, el movimiento de dicha frontera disminuye debido a la tendencia de las distribuciones espaciales hacia las capacidades de carga correspondientes; por ejemplo: en el escenario 1, donde las capacidades de carga son iguales, la frontera libre se estabiliza conforme al tiempo transformándose en una nueva frontera fija, esto ocurre porque las poblaciones disminuyen su dispersión debido a que las distribuciones son cada vez más uniformes y tienden al mismo limite, es decir que desde estas consideraciones la región de una de los grupos disminuirá pero luego ésta se fijará evitando la extinción de alguno de los grupos. Lo contrario ocurre en el escenario 2, en el que una capacidad de carga del grupo uno es mayor que la del grupo dos, lo que genera, a partir de un instante de tiempo, la densidad poblacional del grupo uno sea superior que la del otro grupo y por tanto la frontera libre tienda a una de las fronteras fijas establecidas, es decir, tal grupo ocupará toda la región, lo contrario ocurre en el escenario 3 el grupo dos ocupa toda la región.

Cuando la dispersión de uno de los grupos es mayor que el otro (escenarios 4 y 5) la frontera libre se mueve más rápidamente hacia las fronteras fijas, esto es, el grupo con mayor dispersión tiende a invadir el espacio del grupo de menor dispersión. En la figura 14 se muestra el comportamiento de la población cuando la frontera libre se encuentra en los bordes, esto es $x = 0$ y $x = 1$ respectivamente, la frontera no se mueve debido a que la dirección de los grupos no es hacia afuera si no hacia el interior de la región y por las condiciones de contornos.

Conclusiones

Esta investigación se centró únicamente en hacer una aproximación numérica para el PFL de dos grupos de animales que compiten por espacio en una región determinada, empleando el esquema implícito, este método es incondicionalmente estable y por consiguiente convergente. Obteniendo así, la estructura de un algoritmo para las simulaciones numéricas y que sirve para analizar el comportamiento del modelo matemático.

Con respecto a las simulaciones numéricas que se realizaron, se pudo observar que el movimiento de la Frontera Libre y su correlación con la distribución de las densidades poblaciones de los grupos en el espacio es lógico desde las hipótesis y suposiciones ecológicas consideradas, con un estudio más detallado y con datos reales es posible emplear los resultados obtenidos en control y extinción de grupos ecológicos en regiones fijas.

Referencias

Apostol T. M. (1976). *Análisis Matemático* (2da. ed). Editorail Reverté.

Burden, R. L y Faires, J. D. (2003). *Análisis Numérico*. Séptima edición. Thomson.

Kim, K. y Lin Z. (2009). A free boundary problem for a parabolic system describing an ecological model. *Linear Analysis: Real World Applications*. Vol.10.

Lamé G. et Clapeyron B. P. (1831). Memoire sur la Solidification par Refroidissement d'un Globe Liquide. *Ann. Chimie Physique*, Vol. 47.

Mathews J. H. y Fink K. D. (2008). Métodos Numéricos con Matlab. Tercera edición. Pearson Prentice Hall.

Murray J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction*. Third Edition. Springer.

Murray J. D. (2003). *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Application*. Third Edition. Springer.

Okubo A. y Levin S. A. (2002). *Diffusion and Ecological Problems: Modern Prespectives.* Second Edition. Springer.

Stefan J. (1889). Ueber dir Theorie der Eisbildung, Insbesonder ueber die Eisbildung im Polarmeer. *Zit. Akad. Wiss. Wien, Math. Cl.*, Vol. 98.

Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula[1]

Elementary algebraic reasoning: Proposals for the classroom

Raciocínio algébrico Fundamental: propostas para a sala de aula

Fecha de recepción: enero de 2014
Fecha de aceptación: julio de 2014

Walter Castro Gordillo[2]

Resumen

En este artículo **s**e aborda el problema de la enseñanza de álgebra en la escuela primaria. Se discute lo que se entiende como "early álgebra" y se presentan varios enfoques sobre la introducción del álgebra en la escuela elemental. En correspondencia con los enfoques, se discuten tanto algunas tareas de razonamiento algebraico elemental que pueden ser implantadas en el aula, como algunas de las características algebraicas atribuidas. Finalmente, se presenta una propuesta para asignar niveles o grados de algebrización a algunas tareas.

Palabras clave: razonamiento algebraico elemental, análisis epistémico, álgebra elemental, currículo, naturaleza algebraica.

Abstract

The problem of teaching algebra in elementary school is discussed. It discusses what is meant by "early algebra" and various approaches to the introduction of algebra in elementary school are presented. In correspondence with the approaches, both some elementary algebraic reasoning tasks that can be implemented in the classroom, as some of the characteristics attributed algebraic discussed. Finally a proposal to assign levels or degrees of algebraization some tasks is presented.

Keywords: Algebraic reasoning elemental, epistemic analysis, elementary algebra curriculum, algebraic nature.

Resumo

O problema de álgebra de ensino na escola primária é discutida. Ele discute o que se entende por "álgebra precoce" e várias abordagens para a introdução da álgebra na escola primária são apresentados. Em correspondência com as abordagens, tanto algumas tarefas de raciocínio algébricas elementares que

1 Artículo de investigación.

2 Universidad de Antioquia, Medellin (Colombia). Contacto: wfcastro82@gmail.com

podem ser implementadas em sala de aula, como algumas das características atribuídas algébrica discutido. Finalmente, uma proposta para atribuir níveis ou graus de algebraization algumas tarefas é apresentada.

Palavras-chave: raciocínio algébrica elementais, análise epistêmica, currículo álgebra elementar, natureza algébrica.

Antecedentes

El álgebra ha sido considerada como un "guardián" que impide el acceso de los estudiantes a niveles superiores de estudio y reflexión en matemáticas. Kaput (2000) hizo una propuesta denominada "algebra for all" en la que sugiere tomar acción para promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora.

Para lograr que la formación en álgebra alcance a una población mayor, algunos investigadores han propuesto incluir el razonamiento algebraico desde los niveles inferiores de la educación primaria (Davis, 1985). Esta propuesta ha sido denominada "la algebrización" del currículo (Kaput, 2000), lo cual se conoce también como "early algebra" —algebra temprana—. Los resultados de diversas investigaciones longitudinales sobre la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007) animan a iniciar la enseñanza del álgebra en la escuela primaria para preparar a los niños para asumir el álgebra de la escuela secundaria. Ante los informes sobre la introducción del álgebra en la escuela se formula la pregunta ¿pueden los niños aprender álgebra? (Carraher y Schlieman, 2007, p. 675).

Enfoques de introducción del álgebra

No existe una autoridad ni una organización que determine con certeza que ha de entenderse como "álgebra" y por ello, que ha de entenderse como álgebra en la escuela elemental. Sin embargo diversos autores han señalado características del álgebra. Entre tales caracterizaciones se encuentran las siguientes:

- Usiskin (1988), propone cuatro concepciones del álgebra: Aritmética generalizada; el conjunto de procedimientos usados para resolver ciertos problemas; el estudio de las relaciones entre cantidades, y finalmente, el estudio de la estructura.
- Kaput (1998), identificó cinco aspectos propios del álgebra: generalización y formalización; el estudio de las funciones, relaciones y la variación conjunta; y la modelación.
- La NCTM (1998, p. 161), propuso cuatro organizadores curriculares para el álgebra escolar: Funciones y relaciones; modelación; estructura, y finalmente, lenguaje y representación. En el año 2000 la NCTM afirma que el álgebra en la escuela primaria "enfatiza las relaciones entre cantidades, que incluye a las funciones, formas de representar las relaciones matemáticas, y el análisis del cambio" (p. 37).
- Bass (1998), adoptó una definición más tradicional del álgebra, como la totalidad del sistema numérico, las operaciones aritméticas, el ordenamiento lineal y las ecuaciones.
- Kieran (1996), propuso categorizar el álgebra escolar de acuerdo con las actividades que se pueden proponer a los niños: Actividades generativas, transformacionales, y actividades globales de meta-nivel.
- La *Joint Mathematical Council of the United Kingdom (1996),* reconoce actividades que considera precursoras del álgebra y que pueden ser trabajadas tanto en la escuela primaria

como en la secundaria. Afirma que “hay una necesidad de enfatizar aspectos de meta-razonamiento en el trabajo algebraico y hacerlo parte de la enseñanza” (p. 14).

- Kaput (1998), amplió su propuesta del año 1995 e identificó cinco formas interrelacionadas del pensamiento algebraico: álgebra como una forma de generalizar y formalizar patrones y regularidades, en particular el álgebra como una aritmética generalizada; como una forma de manipulación simbólica, sintácticamente guiada; como el estudio de la estructura y los sistemas, abstraídos de los cálculos y las relaciones; como el estudio de las funciones, las relaciones, y la variación conjunta y finalmente, álgebra como modelación.
- Burkhardt (2001), propuso una taxonomía para lo que significa hacer álgebra, que comprende quince aspectos. Es una propuesta amplia de inclusión del álgebra en el currículo matemático de la escuela primaria y secundaria.

Este amplio conjunto de caracterizaciones da una idea sobre los aspectos fundamentales, sugeridos por los investigadores, que subyacen y conectan muchos principios matemáticos básicos.

Se ha argumentado que el álgebra puede apoyar a estructurar los conocimientos matemáticos de los estudiantes; adicionalmente, se ha reportado el efecto positivo en la enseñanza del álgebra de la secundaria como resultado de la introducción temprana del álgebra en la escuela primaria (Smith, 1996; Strother, 2010). Otros estudios han mostrado que los estudiantes pueden usar los conceptos algebraicos fundamentales en los primeros niveles de la escuela primaria (Schifter, Monk, Russell y Bastable, 2008; Brizuela y Earnest, 2008). Estos resultados favorables han animado a los maestros y a los funcionarios educativos a incluir el álgebra en el currículo de la escuela primaria (Cai, 2004; CCSSI, 2010). Sin embargo, no se trata de introducir un curso formal de álgebra en el currículo de la escuela primaria, ni de proponer a los escolares tareas tipo “álgebra de Baldor”. La propuesta (Kaput, 2000) es “algebrizar” tareas matemáticas para resaltar los aspectos algebraicos que tales tareas puedan tener. Aún en tales casos no se podría afirmar que los niños estén trabajando con álgebra de manera amplia y conscientemente, sólo que están usando algunas características algebraicas, aún así es recomendable ofrecer a los niños oportunidades de usar algunas características del álgebra.

Propuestas de introducción del álgebra

Los enfoques sobre lo que ha de considerarse como álgebra son diversos, así mismo lo son las propuestas curriculares de introducción del álgebra en diversos países. En lo que sigue se hará un compendio de propuestas de introducción curricular del álgebra, en el cual se mencionarán algunos de los elementos algebraicos y el enfoque que tienen en el currículo de los países referenciados. Estos países son: China, Rusia, Corea, Estados Unidos, y la ciudad estado, Singapur. Para el caso de Estados Unidos y Rusia, las propuestas discutidas son válidas en algunos de sus estados o provincias.

- Álgebra en el currículo chino: el propósito de la introducción del álgebra en el currículo es “ayudar a los estudiantes a representar y a comprender relaciones cuantitativas numérica y simbólicamente” (Cai, 2004, p. 7). Las variables se introducen por medio del recurso de “espacios para completar” con números, se ven como “representaciones de un rango de valores” y se hace uso de palabras, en lugar de letras, para ayudar a los estudiantes a comprender las fórmulas. Así mismo, se enfatizan tres “hábitos mentales”: examen de relaciones cuantitativas desde diferentes perspectivas; uso de operaciones inversas para resolver ecuaciones; y finalmente la generalización a partir de casos específicos. El álgebra, desde esta perspectiva, se introduce desde el primer grado.

- Álgebra en el currículo ruso: desde la propuesta de Davydov, los niños desarrollan el razonamiento algebraico al explorar y comparar cantidades. Esto se hace antes del estudio de la aritmética. El proceso se inicia mediante el uso de letras para expresar relaciones parte-todo, para hallar números faltantes, se continúa hacia la medición. Los niños usan modelos para analizar y expresar relaciones cuantitativas, y manipular simbólicamente estas relaciones. El álgebra se introduce desde el primer grado.
- Álgebra en el currículo coreano: el estudio "formal" del álgebra se inicia en séptimo grado. El álgebra es mucho más que el dominio de técnicas y procedimientos. Durante la educación matemática precedente se provee a los estudiantes con oportunidades para fundamentar el estudio del álgebra. Algunas de estas actividades son: generalización, pensamiento analítico, pensamiento dinámico, modelación y organización.
- Álgebra en el currículo de Estados Unidos: si bien, dada la estructura organizativa del sistema educativo de los Estados Unidos, no existe una propuesta unificada de introducción del álgebra en la escuela primaria. Existen propuestas de actividades que orientan tal introducción. Ejemplos de actividades se pueden localizar en el sitio http://investigations.terc.edu/. De tales actividades se resaltan dos características: el estudio del cambio y, estudio de relaciones cuantitativas y cualitativas.
- Álgebra en el currículo de Singapur: algunos conceptos formales se introducen en grado seis. En este grado, se enseña a construir, simplificar y evaluar expresiones algebraicas de una variable. El currículo matemático de la primaria ofrece oportunidades para que se desarrolle el pensamiento algebraico: generalización, resolución de problemas y conocimiento de funciones como modelos de ciertos problemas. Las operaciones aritméticas resaltan el proceso de "hacer y deshacer". Se enfatiza en los procesos de pensamiento, más que en las técnicas. Se reconocen varias "grandes" ideas en álgebra: la incógnita; patrones numéricos; y uso de letras como variables. Los niños trabajan problemas en los cuales se enfatizan "hábitos mentales": hacer, deshacer, construcción de reglas para representar funciones.

La tabla 1 muestra los énfasis algebraicos propuestos en los currículos de los cinco países referidos

	China	Rusia	Singapur	Corea del Sur	Estados Unidos
Objetivo 1 Entender patrones	✓		✓	✓	✓
Objetivo 2 Usar símbolos algebraicos	✓	✓	✓	✓	
Objetivo 3 Usar modelos matemáticos	✓	✓	✓	✓	✓
OBJETIVO 4 Analizar el cambio		✓			✓

Tabla 1. Énfasis algebraicos propuestos en los currículos de los cinco países referidos

Fuente: Cai (2004, p. 10)

A manera de ejemplo

A continuación se ilustran dos tareas y las soluciones, dadas por niños de quinto grado de escuela primaria, a tareas algebraicas.

Tarea 1. Se sabe que cuatro bolsitas de caramelos más cinco caramelos tiene el mismo número de caramelos que dos bolsas más trece caramelos. Todas las bolsas tienen el mismo número de caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene la bolsa?

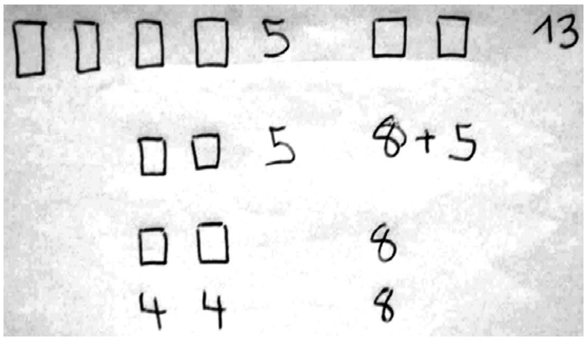


Figura 1. Solución de un niño de quinto grado

El niño ha representado cada bolsa de caramelos mediante un rectángulo. Este rectángulo representa tanto la bolsa de caramelos como el número desconocido de caramelos que contiene. La similitud entre el uso de un "rectángulo" para representar a la bolsa y al número de caramelos que contiene y el uso de una letra "x", que podría usarse formalmente, para denotar lo mismo es notable.

A continuación, se aprecia un procedimiento "algebraico" que conduce a una reducción de la ecuación. Las operaciones "físicas" o "numéricas" que el niño utiliza corresponden a operaciones matemáticas bien reconocidas por los maestros.

Nótese la descomposición que el niño hace del número trece como "8 +5" cuya intención es "eliminar" el cinco de ambos lados de la expresión. Finalmente, encuentra una expresión que se puede leer como "la cantidad de caramelos contenidos en dos bolsas es 8", la condición sobre el mismo número de caramelos en cada bolsa es claramente tenido en cuenta por el niño, quien descompone 8 como "4+4", de donde se obtiene la solución al problema. La presencia del concepto de "igualdad" como relación de equivalencia es manifiesta a lo largo del proceso. Aceptar esta solución como *algebraica* o *no algebraica* depende de la postura epistémica de cada uno.

Tarea 2. Se muestra en la figura 2, la cual se tomó de *Positive Algebra: A Collection of Productive Exercises* (2004, p. 66).

Enunciado: ¿Cuánto vale una sombrilla y una gorra?

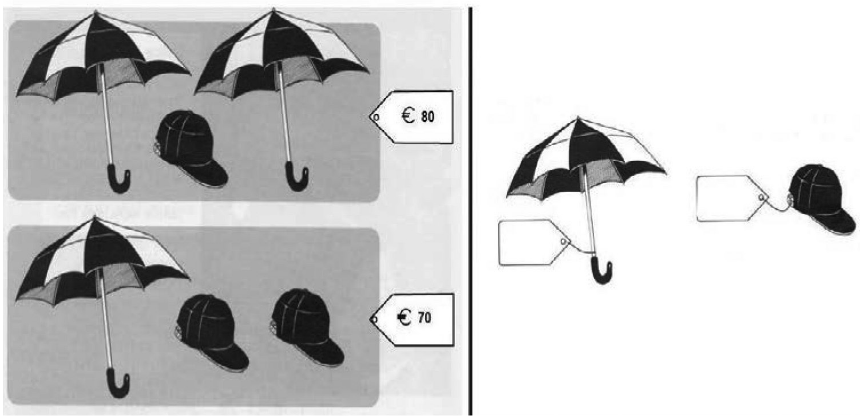


Figura 2. Tarea de sombrillas y gorras

Fuente: Positive Algebra: A Collection of Productive Exercises

Resalta en esta tarea el uso de representaciones visuales en el enunciado. El uso de las mismas en la resolución de tareas matemáticas es controversial pues, a pesar que ha sido usado durante siglos y considerado indispensable en el trabajo de los matemáticos (Rival, 1987), fue relegado por los matemáticos del siglo pasado por considerarlo informal. Para Stylianou (2002) "se ha hecho poco trabajo empírico que conduzca hacia una mayor comprensión de los procesos relacionados con el uso de representaciones visuales" (p. 304).

En esta tarea se reconoce la importancia a los elementos gráficos y se asumen en su papel de "elementos lingüísticos" que están sujetos a asignación de significados por parte de los niños a quienes se les propone la solución de la tarea. A continuación, se enumeran algunos objetos y significados de carácter algebraico que están presentes o surgen cuando se resuelve la tarea. Los elementos lingüísticos en esta tarea son de dos tipos: los escritos y los pictóricos. Estos últimos tienen gran presencia e importancia en esta tarea, en tanto que comunican significados que no están explícitamente expresados en la redacción de la tarea ni en la pregunta. Algunos investigadores han indagado sobre las representaciones gráficas y su uso por los niños (Goldenberg, 1988; Juraschek y Angle, 1986). Goldenberg concluyó que las gráficas tienen convenciones y ambigüedades propias y pueden ser poco accesibles a los niños que se inician en el estudio del álgebra.

La presencia de elementos pictóricos en el enunciado de esta tarea y la asignación de significados que convocan, es determinante para su solución. La pregunta ¿cuánto vale una sombrilla y una gorra?, establece la pregunta en la tarea. Indica que la respuesta que corresponde al valor numérico correspondiente al precio de una sombrilla y de una gorra.

La suma de los precios de dos sombrillas y una gorra es de 80€; el precio de cada sombrilla es el mismo. Las suma de los precios de dos gorras de características similares y de una sombrilla es de 70€; el precio de cada gorra es el mismo.

Los conceptos de incógnita suma e igualdad son básicos en una propuesta de solución de la tarea, ya sea de carácter algebraica o aritmética, como se describen a continuación:

- Incógnitas: valores desconocidos que deben ser hallados. Tales valores están sujetos a condiciones establecidas gráficamente.
- Suma: la suma de los precios desconocidos.
- Igualdad: relación establecida entre precios desconocidos y los valores de sus sumas.

El reconocimiento de dos valores desconocidos que pueden ser hallados a partir de la información provista en el problema es crucial en el carácter algebraico de la tarea, con independencia del método de solución del mismo. Se resalta el carácter relacional que el signo igual tiene en esta tarea y que es asumido como tal por los niños sin ninguna instrucción al respecto. Algunos de los procedimientos que se resaltan en una posible solución de la tarea son:

- Procedimiento numérico de ensayo y error: los estudiantes asignan diversos valores numéricos para los precios de las sombrillas y de las gorras, los suman y comprueban si cumplen simultáneamente las dos condiciones.
- Procedimiento gráfico: consiste en escribir (dibujar) dos sombrillas y una gorra, más dos sombrillas y una gorra, y luego asociar dos sombrillas y una gorra y reemplazarlas por el precio combinado de ellas. De tal manera se puede obtener una gráfica en donde figuran dos gorras con un precio de 84, y como

el precio de cada gorra es el mismo, se obtiene así el precio combinado de dos gorras, de donde se puede obtener el precio de una sola.

- Procedimiento algebraico: se asignan incógnitas para los precios desconocidos de sombrillas y gorras, y se procede a resolver un sistema lineal de dos ecuaciones por dos incógnitas.

Algunas propiedades que podrían ser usadas en una solución a la tarea son:

- El precio de cada sombrilla es el mismo: el precio de una sombrilla es el mismo en ambas condiciones de la tarea, lo cual reduce el número de incógnitas.
- El precio de cada gorra es el mismo: los estudiantes asignan diversos valores numéricos para las sombrillas y las gorras, los suman y comprueban si cumplen simultáneamente las dos condiciones.
- El precio de una sombrilla y una gorra, respectivamente, es el mismo en ambas condiciones de la tarea, lo cual reduce el número de incógnitas.
- La tarea tiene solución única: la tarea tiene solución y puede ser hallada.

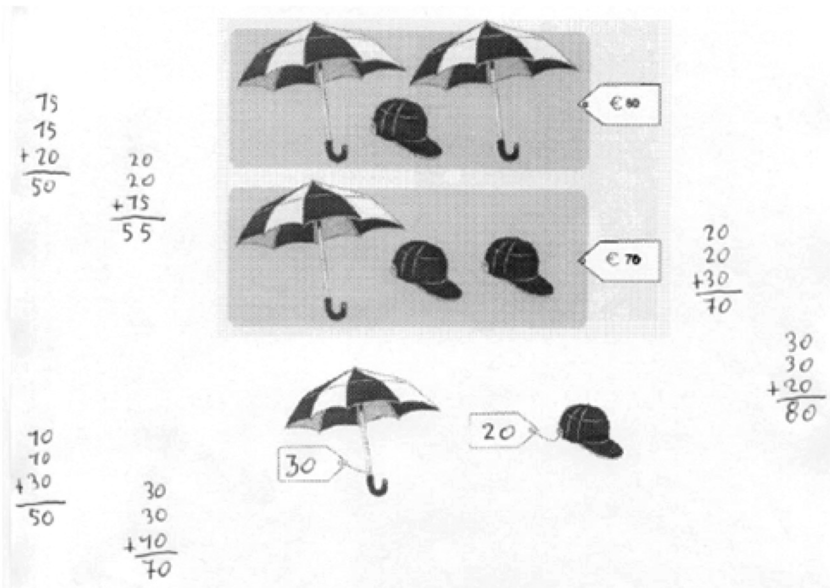


Figura 3. Una solución a la tarea de sombrillas y gorras

Niveles de algebrización

Las experiencias enumeradas (Cai, 2004) ilustran alternativas de introducción curricular del álgebra en la escuela primaria. Adicionalmente, diversas investigaciones reportan los logros de niños de escuela primaria cuando trabajan con tareas propias del razonamiento algebraico elemental (Amit y Neria, 2008; Becker y Rivera, 2008, Britt y Irwin, 2008).

La propuesta de introducción requiere reconocer niveles o grados de algebrización de las tareas matemáticas que se proponen en el currículo establecido. Estos niveles deberían considerar las diversas características asociadas al razonamiento algebraico elemental de una manera progresiva a lo largo de toda la educación primaria. La identificación de niveles de algebrización podría ayudar a los maestros a reconocer características algebraicas infusas en las tareas y a promover el desarrollo del pensamiento algebraico. Para Blanton y Kaput (2005, p. 414): “la mayoría de los profesores de escuela elemental tienen poca experiencia con los aspectos ricos y conexos del razonamiento algebraico elemental” y agregan “debemos proveer formas apropiadas de apoyo profesional que produzca cambio en las prácticas curriculares” (p. 414).

A partir de consideraciones sobre la naturaleza del álgebra (Godino, Castro, Ake y Wilhelmi, 2012) se pueden proponer niveles de algebrización (Godino, Ake, Gonzato, Wilhelmi, 2012). A modo de resumen se enumeran los niveles de algebrización y las características asociadas a tales niveles. Para un estudio más detallado, tanto de la naturaleza algebraica como de los niveles, se referencian los dos artículos mencionados anteriormente.

Las actividades se consideran “algebraicas” por cuanto que exhiben algunas características algebraicas y que los estudiantes utilicen estas características para resolver tareas matemáticas, abordables en educación primaria. El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro.

A continuación se describen los cuatro niveles de algebrización propuestos por Godino, Ake, Gonzato, Wilhelmi (2012). Las definiciones se citan literalmente del texto referido.

- Ausencia del razonamiento algebraico (Nivel 0). Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.
- Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1). Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.
- Nivel intermedio de algebrización (Nivel 2). Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3). Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Estos niveles favorecen la atribución de niveles o grados de algebrización a tareas matemáticas escolares. Adicionalmente, pueden contribuir a sistematizar la introducción del razonamiento algebraico elemental desde los primeros niveles de la escolaridad. Esta sistematización apoya la propuesta de Kaput (2000) de algebrizar el currículo matemático escolar.

Referencias

Amit, M. y Neria D. (2008). Rising to the challenge: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 11-119.

Bass, H. (1998). Algebra with integrity and reality. In M. S. E. Board (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of the National Research Council Symposium*. Washington DC: National Research Council.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Becker, J. R. y Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: The foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *ZDM The international Journal on Mathematics Education, 40*(1), 1.

Britt, M. y Irwin, K. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic*, *40*(1), 39-53.

Brizuela, B. M. and Earnest, E. (2008). Multiple notational systems and algebraicunderstandings: The case of the "Best Deal" problem. In J. J. Kaput, D. W.

Carraher and M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. New York: Routledge.

Burkhardt, H. (2001). Algebra for all: What does it mean? How are we doing? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1). Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 107-130.

Carraher, D. W. y Schlieman, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester y K. Jr. (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2). NCTM.

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for mathematics. Access: December 2010. Available: http://www.corestandards.orgiassets/CCSSI_Math%20 Standards.pdf

Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior*, *4*, 195-208.

Derry, S. J., Wilsman, M. J. y Hackbarth, A. J. (2007). Using Constrasting Case Activities to Deepen Teacher Understanding of Algebraic Thinking and Teaching. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 305-329.

Godino, J., Castro, W.F., Ake, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema (Boletín de Educación Matemática, Revista Brasileña), 26*, (42B), 559-588

Godino, J.D., Aké, L.P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M.R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: SEIEM

Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors and human factors: Mathematical, technical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *7*, 135-173.

Joint Mathematical Council of the United Kingdom. (1996). *Teaching and learning algebra pre-19*. London: Royal Society/JMC Working Group.

Juraschek, B. y Angle, N. S. (1986). *The binomial grid. Mathematics Teacher, 5*, 337-339.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.*

Kaput, J. (Ed.). (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum*. Washington D.C: National Academy Press.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, C. Hodgson, C. Laborde and A. Pérez (Eds.), *8 th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*. Seville, Spain: SAEM Thales.

NCTM. (1998). *Principles and standards in school mathematics: Discussion draft*. Reston: NCTM.

Rival, I. (1987). Picture puzzling:mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning. *Sciences*, *27*(1), 40-46.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J. y Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? In J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*.

Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Smith, J. B. (1996). Does an extra year make any difference? The impact of early access to algebra on long-term gains in mathematics achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 18*(2), 141-153.

Strother, S.A. (2011). *Algebra knowledge in early elementary school supporting later mathematics ability.* University of Louisville. Tesis Doctoral.

Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 303-317.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K-12*. Reston: NCTM.

Aspectos culturales sobre la enseñanza de los fundamentos de la matemática[1]

Cultural aspects on teaching the basics of mathematics

Aspectos culturais no ensino das noções básicas de matemática

Fecha de recepción: diciembre de 2103

Fecha de aceptación: julio de 2014

Alfonso Segundo Gómez Mulett[2]

Resumen

Este artículo surge como producto de una investigación realizada sobre la enseñanza universitaria de la lógica y la teoría de conjuntos en el Caribe Colombiano. Se pretende mostrar algunos aspectos sobre el contenido de los cursos de fundamentos de la matemática en el primer año de universidad, después de un examen bibliográfico y documental de textos y programas de asignatura. La pesquisa permitió encontrar que en la mayoría de los casos existen dos tendencias, una de tipo cultural y otra de tipo histórico, respecto a lo que se ha entendido por fundamentos de la matemática.

Palabras clave: enseñanza, fundamentos, programas, matemática universitaria, textos escolares.

Abstract

This work appears as marginal product of research conducted on university teaching of logic and set theory in the Colombian Caribbean. We intend to show some aspects of the course content of foundations of mathematics in the first year of college, after a literature review and documentary texts and course programs. The investigation led to the discovery that there are two tendencies, a cultural and other historical type, regarding what has been understood by foundations of mathematics in most cases.

Keywords: Education, foundations, programs, university mathematics textbooks.

Resumo

Este trabalho surge como um produto marginal de pesquisas sobre o ensino universitário da lógica e da teoria dos conjuntos no Caribe colom-

1 Artículo de investigación.

2 Profesor de la Universidad de Cartagena, Cartagena (Colombia). Contacto: agomezm1@unicartagena.edu.co

biano. Pretendemos mostrar alguns aspectos do conteúdo do curso de fundamentos da matemática no primeiro ano de faculdade, depois de uma revisão da literatura e textos documentais e programas dos cursos. A investigação levou à descoberta de que existem duas tendências, um tipo de histórico cultural e outros, sobre o que tem sido entendido por fundamentos da matemática, na maioria dos casos.

Palavras-chave: educação, fundações, programas, livros de matemática da universidade.

Introducción

En la enseñanza universitaria, el primer curso del currículo de matemáticas en las carreras que utilizan la matemática para apoyar el desarrollo disciplinar, se presenta generalmente a manera de un curso introductorio. Este curso, en la literatura escolar, suele llamarse precálculo, matemática básica, introducción a la matemática, álgebra y trigonometría, fundamentos de matemáticas, entre otros. Cualquiera que sea el nombre del curso, el contenido expone nociones de lógica y teoría de conjuntos o solamente teoría de conjuntos al comienzo, con el propósito de proveer una teoría base o fundamento para el estudio de los temas siguientes; pero ¿estos temas permiten realmente fundamentar la matemática articulándose al tratamiento posterior de las temáticas restantes? Responder a esta pregunta implica contextualizar el significado de la expresión *fundamentos de la matemática* desde lo pedagógico, pero también teniendo en cuenta el contexto en el cual se cimenta la matemática enseñada.

Marco teórico

Existe una amplia discusión sobre la enseñanza de la matemática en el nivel universitario, sin que se haya llegado a conclusiones unificadas (Artigue, 2003). Lo mismo ocurre sobre el significado de los fundamentos de la matemática y su enseñanza, donde se encuentran diferentes puntos de vista a veces antagónicos, por ejemplo, González (1950) y Putman (1967) entre otros, dan significado preciso a esta expresión, mientras que Harada (2005) afirma que las matemáticas no necesitan fundamento porque no son radicalmente diferentes a las ciencias empíricas y a las demás actividades humanas. En lo relacionado con la enseñanza de los fundamentos de la matemática, Thom (1981) da poca importancia a los fundamentos de la matemática, mientras que, los seguidores de la matemática moderna dan tratamiento especial a la teoría de conjuntos. Esta problemática permite dar diferentes interpretaciones dependiendo del origen de las nociones matemáticas, el propósito de la enseñanza, los aspectos históricos y las tendencias educativas.

Si se revisa el origen de las nociones matemáticas, debe recurrirse a la epistemología, es decir, a las corrientes que sustentan la matemática: el logicismo, el formalismo y el intuicionismo (Henkin, 1971). Si la interpretación se hace desde el propósito de la enseñanza, los contenidos se ajustarían a una matemática instrumental, conteniendo conceptos básicos elementales sin lógica y teoría de conjuntos, como lo propone

Kline (1976), o a lógica y teoría de conjuntos como lo propone Manzano (2004). Si se tienen en cuenta los aspectos históricos, los fundamentos deberían estar constituidos por la geometría y el álgebra; y si los fundamentos se interpretan desde las tendencias educativas, según González (1994), habría que examinar los tres paradigmas en la enseñanza de la matemática para determinar los contenidos, o recurrir a los estándares internacionales.

Siguiendo a Ramos (2005), no solo las interpretaciones señaladas anteriormente explican qué son y cómo se enseñan los fundamentos en matemática, pues existe un sistema de creencias del profesorado sobre el tema, adquirido culturalmente y reflejado en los programas curriculares. Estas creencias son subjetivas, están basadas en los sentimientos, están articuladas y se relacionan entre sí formando un sistema, usan una lógica empírica debido a que no gozan de un grado de rigurosidad comprobable, se refieren a situaciones concretas y se orientan por la intuición a través de la observación de ciertos hechos que el creyente tiende a generalizar, se van construyendo a partir de una realidad observada y de la visión que se tiene del entorno o el mundo hasta constituir un esquema conceptual (De Faría, 2008).

Afinando la discusión sobre los fundamentos de la matemática desde la enseñanza y los propósitos de esta investigación, existen dos interpretaciones claras: la primera, los fundamentos están constituidos por la lógica formal aristotélica y la teoría de conjuntos; la segunda, los fundamentos están integrados por aquellas teorías que sirven de plataforma a otras, aquí podría incluirse el álgebra, la geometría, la trigonometría y la geometría analítica, con o sin la presencia de los conceptos más elementales de la lógica y la teoría de conjuntos.

Metodología

La elaboración del trabajo se realizó siguiendo la técnica de análisis documental y bibliográfico de contenido. El análisis documental fue utilizado en el estudio de los programas del primer curso de matemática universitaria (Bardin, 1986), aplicado a una muestra subjetiva de diez programas. El análisis bibliográfico de contenido se aplicó según Lupiáñez (2010), a una muestra representativa de los seis textos que históricamente han sido más utilizados, y que aparecen referenciados en los programas, inspeccionando las nociones básicas de lógica y teoría de conjuntos y su articulación con el resto de contenido.

Resultados

Los resultados obtenidos del examen de contenidos aplicado a los seis textos de matemática y a los programas del primer curso de matemática universitaria, en seis cursos de ingeniería y cuatro de ciencias administrativas y contables, obedecieron a las siguientes preguntas: ¿cuáles nociones básicas de lógica y conjuntos se presentan?, y ¿existe articulación entre las nociones básicas y el resto del contenido?

De los programas de ingeniería analizados, solamente uno de ellos introduce nociones elementales de lógica y conjuntos, dos programas incluyen conjuntos y sus operaciones y los otros no incluyen ninguno de los dos temas. Los que contienen los temas no muestran articulación con la temática consecutiva. Así las cosas, la enseñanza de los temas constituye un agregado sin importancia.

Los textos analizados fueron el de Allendoerfer y Oakley (1990), Leithold (1998), Zill y Dewar (2000), Sobol y Lerner (2006), Swokowski y Cole (2008) y Arya y Lardner (2002). Los resultados se resumen en la tabla 1:

Texto	Contenido de lógica	Contenido de conjuntos	Articulación con el resto del contenido
Allendoerfer	Proposiciones, tablas de verdad, cuantificadores, métodos de demostración.	Operaciones con conjuntos	Nula (lógica) Débil (conjuntos)
Leithold	Ninguno	Conjunto de los números reales	Ninguna
Zill	Proposiciones, argumentos, métodos de demostración, cuantificadores.	Operaciones con conjuntos	Débil
Sobol	Proposiciones, cuantificadores, reglas de inferencia	Operaciones con conjuntos, cardinal de un conjunto.	Débil
Swokowski	Ninguno	Ninguno	Ninguna
Arya	Ninguno	Conjuntos e intervalos	Ninguna

Tabla 1. Textos analizados

Adicionalmente, el texto de Allendoerfer estudia primero los conjuntos y después la lógica, contrariando los fundamentos; los métodos de demostración no se resaltan al realizar algunas demostraciones o ejemplificar conceptos; no se hace énfasis en el manejo de los cuantificadores. En Sobol no se sabe cuál es el propósito de presentar reglas de inferencia, en general, los conjuntos se incluyen para hablar del conjunto de los números reales, es decir, para que quede una constancia de su inclusión.

Conclusiones

De acuerdo con los resultados, se vislumbra que la cultura de la enseñanza de la matemática no se fundamenta en la lógica y la teoría de conjuntos, sino en las temáticas que tradicionalmente han sido consideradas como teoría base. La cultura de la enseñanza de la matemática universitaria en su curso inicial es la de consolidar el álgebra, la trigonometría y la geometría analítica del bachillerato. Si bien se ha aprendido matemáticas sin lógica y conjuntos, es porque existe la creencia de que estos son temas de la matemática pura y el profesional no matemático solamente necesita hacer cálculos, resolver ecuaciones, solucionar problemas prácticos, es decir, lo cuantitativo porque la historia indica que es así. Pero todo esto tiene causas comunes, según Bishop (1988) transferimos ideas ciegas de un país a otro, de una generación a otra, de un gobierno a otro, de cultura a cultura. Así, la matemática del presente es un legado cultural donde la lógica y la teoría de conjuntos han tenido poca aceptación. Esto se ve reflejado en los textos importados analizados, determinantes del currículo, y en la escasa o ignorada preparación de los profesores en epistemología de la matemática.

Referencias

Allendoerfer, C. y Oakley, C. (1990). *Fundamentos de Matemáticas Universitarias* (4ta. edición). México: McGraw-Hill.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel universitario? *Boletín de la Asociación matemática Venezolana*, *10*(2), 117-134.

Arya, J. y Lardner, R. (2002). *Matemáticas para administración y economía* (4ta. edición). México: Pearson.

Bardin, L. (1986). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Bishop, A. (1988). Aspectos sociales y culturales de la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*, *6*(2), 121-125.

De Faría, E. (2008). Creencias y matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 3*(4), 9-27.

González, F. (1994). *Paradigmas en la enseñanza de la matemática*. Maracay: Copiher.

González, M. (1950). La crisis actual de los fundamentos de la matemática. *Revista Cubana de Filosofía, 1*(6), 25-50.

Harada, E. (2005). El cuasi-empirismo en la filosofía de las matemáticas. *Elementos*, *12*(59), 15-21.

Henkin, L. (1971). Mathematical foundations for mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *78*(5), 463-487.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI Editores. Manzano, M. (2004). *Summa logicae en el siglo XXI*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Leithold, L. (1998). *Matemáticas previas al cálculo* (3ta. edición). México: Harla.

Lupiáñez, J. (2010). *El análisis didáctico como herramienta para el análisis de textos de matemáticas*. Documento inédito: Universidad de Granada.

Putman, H. (1967). Mathematics without foundations. *Journal of Philosophy,* (64), 5-22.

Ramos, A. (2005). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona, España.

Thom, R. (1981). Matemática Moderna: ¿Error educacional y filosófico? *Lecturas matemáticas*, 2(3), 279-298.

Sobol, M. y Lerner, N. (s. f.). *Precálculo* (6ta. edición). México: Pearson.

Swokowski, E. y Cole, J. (2008). Álgebra *y trigonometría con geometría analítica* (12va. edición). México: Cangage learning.

Zill, D. y Dewar, J. (2000). Álgebra y trigonometría (2da. edición). Colombia: McGraw-Hill.

Inclusión de conocimientos matemáticos locales en los de currículos de matemáticas en situaciones de interculturalidad[1]

Inclusion of local mathematical knowledge in mathematics curricula in intercultural situations

Inclusão do conhecimento matemático local no currículo de matemática em situações interculturais

Fecha de recepción: noviembre de 2013

Fecha de aprobación: julio de 2014

Pilar Alejandra Peña Rincón[2]

Resumen

Este artículo presenta el avance de una investigación doctoral en curso cuyo interrogante principal es ¿cómo incluir los conocimientos matemáticos propios de una cultura local con los conocimientos matemáticos de la cultura global implícitos en el currículo nacional?, tomando en cuenta las perspectivas de las diversas culturas en interacción, sin sobreponer una a la otra. El propósito final es construir y validar un modelo de generación de propuestas curriculares interculturales dialógicas-críticas en matemática educativa. El estudio utiliza un enfoque intercultural dialógico y crítico cuyos fundamentos están en la Etnomatemática y en la Educación Matemática Crítica, y una metodología colaborativa que considera la participación equitativa del equipo intercultural en el proceso de investigación.

Palabras clave: exclusión, currículo, conocimiento matemático local, intercultural, dialógico-crítico.

Abstract

This paper presents the progress of an ongoing doctoral research whose main question is how to include their own mathematical knowledge of a local culture with the mathematical knowledge of global culture implicit in the national curriculum taking into account the perspectives of different cultures interact, without overlapping each other. The ultimate goal is to build and validate a model of intercultural curriculum proposals generating dialogic-critical mathematics education. The study uses a dialogic and critical intercultural approach whose foundations are in Ethnomathematics and Mathematics Education Review, and

1 Artículo de investigación.

2 Investigador de doctorado del CICATA-Instituto Politécnico Nacional, México, D. F. (México). Contacto: pilar.pena.rincon@etnomatematica.org

a collaborative methodology that considers the equitable participation of Intercultural team in the research process.

Keywords: Exclusion, curriculum, local mathematical knowledge, intercultural, dialogic-critical.

Resumo

Este artigo apresenta o progresso de uma pesquisa de doutorado em andamento, cuja principal questão é como incluir o seu próprio conhecimento matemático de uma cultura local com o conhecimento matemático da cultura global implícito no currículo nacional, tendo em conta as perspectivas de diferentes culturas interagem, sem sobrepor. O objetivo final é construir e validar um modelo de propostas curriculares interculturais gerando educação matemática dialógica-crítica. O estudo utiliza uma abordagem intercultural dialógica e crítica cujas bases estão em Etnomatemática e Educação Matemática Review, e uma metodologia colaborativa que considera a participação equitativa de equipe Intercultural no processo de pesquisa.

Palavras-chave: exclusão, currículo, conhecimento matemático local, intercultural, dialógico-crítica.

Presentación del problema

Al analizar los procesos sociopolíticos y sus implicancias en el aula se observa que, a medida que la globalización avanza, las aulas se tornan cada vez más interculturales (Skovmose, Alro y Valero, 2008). Con ello, se ha visibilizado la importancia de las culturas de referencia en los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas (Unesco, 2012 y Gavarrete, 2013) y se ha reconocido con más fuerza que cada cultura o comunidad posee desarrollos matemáticos propios que son producto de las prácticas matemáticas en su cultura: las *etnomatemáticas*[3] (D`Ambrosio, 2008).

Las matemáticas locales han sido históricamente excluidas en la escuela. La pregunta por las razones de la exclusión ha hecho que los investigadores tomen conciencia acerca del rol sociopolítico de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la formación de los estudiantes y de las sociedades y de la necesidad de brindar posibilidades de participación equitativa a todos los estudiantes y a sus culturas (Valero y Skovmose, 2012, D`Ambrosio, 2000, Jaramillo, 2011). En el caso específico de Latinoamérica, la educación matemática ha sido y es parte de los procesos de colonización y nacionalización, en los cuales la pérdida de identidad cultural fue y es una condición para la asimilación de las culturas locales a la cultura nacional.

Esta investigación aborda el problema de la exclusión de las culturas locales en el aula de matemáticas en Chile. Surge cuando la investigadora doctorante[4] observa clases de matemáticas en una escuela ubicada en una comunidad aymara,

3 En este estudio se utilizará la palabra etnomatemática en minúscula para hacer referencia a las matemáticas de cada cultura o grupo social y en mayúscula para el enfoque de investigación.

y aprecia que la misma cultura indígena local que tiene una fuerte presencia en la zona no existe, o desaparece en el aula de matemáticas. Pese a que todos los estudiantes de la escuela son de origen aymara, se observa que nada en la clase de matemática alude a la identidad matemático-cultural de los estudiantes.

Marco de referencia conceptual

Se investiga sobre cómo incluir los conocimientos matemáticos propios de una cultura local con los conocimientos matemáticos de la cultura global implícitos en el currículo nacional, tomando en cuenta las perspectivas de las diversas culturas en interacción, sin sobreponer una a la otra. Además, se analiza el uso que se le da a ambos conocimientos matemáticos, y cómo pueden influir en el desarrollo y la transformación de la vida de la cultura en estudio. El producto de la investigación es proponer un modelo de trabajo dialógico critico que permita incluir conocimientos locales y globales en el currículo de educación matemática para brindar equidad en las posibilidades de participación y de aprendizaje a los estudiantes de las diversas culturas presentes en la clase de matemática.

El objetivo es desarrollar un enfoque intercultural dialógico y crítico, cuyos fundamentos están en la Etnomatemática y en la Educación Matemática Crítica. La Etnomatemática (D`Ambrosio, 2008) ha permitido comprender que los desarrollos matemáticos propios de cada cultura contribuyen al desarrollo matemático de todos los estudiantes que interactúan en el aula. Los enfoques etnocentristas de las matemáticas dificultan el proceso de aprendizaje —entendido como el desarrollo de las habilidades matemáticas— de los estudiantes de las culturas locales, porque no reconoce las prácticas y conocimientos matemáticos propios de dichas culturas, y en muchos casos niega las cosmovisiones implícitas en sus conocimientos. Además, contribuyen a la pérdida de la identidad cultural de las primeras. Así mismo, un enfoque etnocentrista de las matemáticas también limita el proceso de aprendizaje de todos los estudiantes que pertenezcan o no a una cultura local, porque los priva de la posibilidad de entender los orígenes de los conocimientos que estudian, cuál es el uso que se da a estos conocimientos en la sociedades o comunidades y cómo pueden utilizarlo en el desarrollo y la transformación de la vida y de su cultura.

A través de la Educación Matemática Crítica (Valero y Skovmose, 2012) se profundiza la reflexión en torno a los conflictos sociopolíticos que enfrenta la Educación Matemática en la formación de los estudiantes y de las sociedades en la actualidad. Particularmente, en los procesos de integración curricular intercultural, se corre el riesgo de verse sometidos a dos paradojas: la paradoja de la inclusión y la paradoja de la ciudadanía (Valero y Skovmose, 2012). La *paradoja de la inclusión* se refiere a la contradicción entre las intenciones democratizantes del discurso de la inclusión, y el desempoderamiento profundo y la exclusión que ciertos sectores sociales experimentan como resultado de las prácticas asociadas a este discurso. Por su lado, la *paradoja de la ciudadanía* se refiere a la contradicción entre el papel de la educación que intenta preparar para la ciudadanía crítica, activa y autónoma, y que al mismo tiempo asegura la adaptación del individuo al orden social dado.

Metodología

Se trabajará mediante un estudio de caso con una comunidad indígena aymara ubicada en la

4 Esta investigación es parte de una tesis doctoral. Será llevada a cabo por un equipo de investigación del cual forma parte la estudiante de doctorado.

comuna de Colchane (Chile). Para llevar a cabo una investigación intercultural dialógica-crítica, es importante considerar la participación equitativa en el proceso de investigación. Por consiguiente, es necesario que la investigación no sólo cuente con la contribución de personas pertenecientes a las culturas en interacción, sino que sea conducida por todas ellas, lo que implica que todos puedan participar en las decisiones acerca del curso de la investigación. Es por ello que se utilizará un enfoque metodológico colaborativo en el sentido que lo plantea Smith (2008, citado en Tamayo, 2012) comprometiéndose en un proceso de construcción colectiva y negociada de la investigación. Se conformará un equipo de investigación integrado por docentes que trabajan en la escuela del lugar, miembros de la comunidad aymara, y la investigadora doctorante. El equipo validará el diseño de investigación, definirá los conocimientos matemáticos locales que se integrarán en la experiencia didáctica, tendrá acceso a todos los documentos de trabajo y validará el análisis de la información recopilada. Los participantes en las entrevistas o jornadas de trabajo audio-grabadas tendrán acceso y podrán modificar las transcripciones.

El diseño propuesto al equipo considera seis fases de trabajo: 1) observación de prácticas matemáticas en la cultura; 2) observación de la presencia de la cultura en las prácticas matemáticas de la escuela; 3) análisis de las observaciones de dos fases anteriores; 4) diseño, implementación y análisis de una experiencia didáctica en la que dialoguen los conocimientos locales con los del currículum nacional; 5) análisis de la inclusión efectiva de los conocimientos locales y globales, y del proceso de diseño; 6) formulación de un modelo de trabajo para elaborar propuestas interculturales dialógicas críticas en matemática educativa.

Análisis de datos

Tal como se infiere a partir del apartado anterior, este estudio espera contar con registros visuales (fotografías), escritos (notas de campo y narraciones escritas), audio-grabados y video-grabados (entrevistas y sesiones de trabajo). Así como también con objetos concretos en los que estén implicadas las prácticas matemáticas de la cultura.

Se empleará un software para el análisis cualitativo de datos (QDA) como instrumento para ordenar y categorizar los datos recolectados. Luego, considerando las categorizaciones producto del trabajo con el software, la experiencia de los miembros del equipo y el propio marco teórico de la investigación, el equipo de investigación sistematizará y organizará los datos en torno a ideas, temas y conceptos. De este modo, se espera poder identificar categorías de análisis emergentes que posteriormente permitirán hacer interpretaciones y construir teoría en función de los propósitos de la investigación.

Conclusiones

Esta investigación se ocupa del tema de la relación dialógica entre los conocimientos y prácticas matemáticas presentes en la cultura y los conocimientos y prácticas matemáticas de la escuela. Existe una disociación originada por razones sociopolíticas y, a la vez que esta disociación no contribuye al desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes, refuerza las conductas discriminadoras de nuestra sociedad.

Como señala Jaramillo (2011), la intervención del modelo neoliberal en la educación ha gestado varias tensiones al interior del currículo. "Una de esas tensiones es la producida por el deseo de mantener, por una parte, la homogeneización en las instituciones escolares, y respetar, por otra, la diversidad social y cultural de los alumnos".

Gradualmente, los educadores matemáticos han tomado posición en ese escenario, y se han hecho cargo de la noción del mundo en tanto intercultural, y por ello, cada vez cobra menos sentido una educación matemática monocultural. En ese contexto, se enmarca este proyecto de investigación, cuyo objetivo último es lograr validar un modelo de trabajo colaborativo que permita elaborar propuestas curriculares interculturales dialógicas críticas en matemática educativa.

Referencias

D`Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática, eslabón perdido entre las tradiciones y la modernidad*. México, D.F.: Limusa.

D`Ambrosio, U. (2000). *Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática*. Acceso: abril del 2013. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo90.pdf

Gavarrete, M. E. (2013). La Etnomatemática como campo de investigación y acción didáctica: su evolución y recursos para la formación de profesores desde la equidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *6*(1), 127-149.

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 13-36.

Skovmose, O., Alro, H., y Valero, P. (2008). Antes de dividir se tiene que sumar. Entre-vistar. Porvenires de estudiantes indígenas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *1*(2), 111-136.

Tamayo, C. (2012). *(Re)significación del currículo escolar indígena relativo al conocimiento matemático desde y para las prácticas sociales: el caso de los maestros indígenas Dule de la comunidad de Alto Caimán* (Tesis). Departamento de educación avanzada. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Valero, P. Skovmose, O. (2012). *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Bogotá: Ediciones Uniandes.

Unesco. (2012) *Challenges in basic mathematics education*. París. Acceso: abril 2013. Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf

La psicología del conocimiento y la construcción de competencias conceptuales en los procesos de formación[1]

The psychology of knowledge and the construction of conceptual skills formation processes

A psicologia do conhecimento e para a construção de processos de formação de habilidades conceituais

Fecha de recepción: febrero 2014

Fecha de aceptación: julio 2014

Yilton Riascos Forero [2]

Resumen

En este artículo se señala la ruptura entre las ciencias y la filosofía que mantiene la equivoca idea de una ciencia exacta que debe ser transmitida a los estudiantes. Trayendo esa discusión a la Educación Matemática se articulan tres temas particulares: la práctica de enseñanza y la práctica de evaluación formal; la formación de profesores y la interacción entre psicología y conocimiento. Se cree que la formación de profesores de matemática debe considerar la filosofía y la epistemología de la construcción de los saberes particulares así como el desarrollo de los procesos psicológicos que sustentan esa construcción, es decir, presupone la construcción de tres aspectos psicológicos: la formación de conceptos y su sistema lógico de representación; la toma de conciencia de estos conceptos y de esa lógica, y la interacción social que caracteriza la situación didáctica en la cual son construidos.

Palabras clave: educación matemática, psicología del conocimiento, formación de conceptos, toma de conciencia, interacción social.

Abstract

We note initially the split between science and philosophy that maintain the misconception finished an exact science and, as such, must be transmitted to students. Bringing this discussion to Mathematics Education articulate three specific issues: the practice of teaching and practice of formal assessment; teacher training and interaction between psychology and knowledge. It is believed that the formation of mathematics teachers should consider the philosophy and epistemology of the construction of individual knowledge and the development of psychological processes underlying such construction, ie, then assumes the construction of three

1 Artículo de revisión.

2 Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca , Popayán (Colombia). Contacto: yirifo@unicauca.edu.co

psychological aspects: training concepts and logical system of representation; awareness of these concepts and thinking behind and the social interaction that characterizes the teaching situation in which they are built.

Keywords: mathematics education, psychology of knowledge, concepts training, awareness, social interaction.

Resumo

Notamos, inicialmente, a separação entre ciência e filosofia que manter o equívoco de terminar uma ciência exata e, como tal, deve ser transmitido aos alunos. Trazendo essa discussão para a Educação Matemática articular três questões específicas: a prática do ensino e da prática da avaliação formal; formação de professores e interação entre psicologia e conhecimento. Acredita-se que a formação de professores de matemática deve considerar a filosofia e epistemologia da construção do conhecimento individual e para o desenvolvimento dos processos psicológicos subjacentes tal construção, isto é, em seguida, assume a construção de três aspectos psicológicos: formação conceitos e sistema lógico de representação; consciência desses conceitos e pensar para trás ea interação social que caracteriza a situação de ensino em que são construídos.

Palavras-chave: educação matemática, psicologia do conhecimento, conceitos de treinamento, a consciência, a interação social.

Introducción

A partir de la experiencia de los autores, se ha llegado a concluir que todavía es común pensar en que la "ciencia" —ciencias exactas, ciencias naturales, ciencias humanas y ciencias sociales— y la "filosofía" constituyen dos actividades separadas, tanto del punto de vista de la terminología como del punto de vista de las prácticas profesionales e institucionales.

Esta ruptura fundamenta una concepción que el medio educativo y la sociedad en general mantienen sobre la ciencia, concebida como un conjunto de conocimientos separados en diferentes áreas. Esta concepción fundamenta a su vez una idea equivocada de una ciencia exacta y acabada y que como tal debe ser transmitida a los estudiantes (Fávero, 2005).

De forma similar, la investigación sobre la relación entre esas concepciones del conocimiento, las áreas del conocimiento y la práctica de la educación, se han referido a la permanencia de la idea de que el desempeño de los estudiantes depende, sobre todo, de su motivación intrínseca y de su capacidad para aprender, ya sean niños, adolescentes o adultos (Fávero M. H., 1999; Riascos Forero y Fávero, 2010, o individuos sanos con necesidades educativas especiales (Fávero y Pimenta, 2006).

Estas representaciones sobre el conocimiento científico, por un lado y otro, son representaciones de lo que sería un buen estudiante, se fundamenta en una práctica de enseñanza en la cual la memorización de reglas tiene prioridad sobre la comprensión conceptual impidiendo el desarrollo de competencias conceptuales y el desarrollo del pensamiento crítico en relación con propio conocimiento.[3]

Considerando estos planteamientos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se articulan tres temas particulares: la práctica de la enseñanza y la práctica de la evaluación formal, la formación de profesores, y la interacción entre la psicología y el conocimiento.

La práctica de la enseñanza y la práctica de la evaluación formal

Las investigaciones muestran dos consensos. El primero se refiere a la importancia de comprender la lógica del sistema decimal de numeración para comprender la lógica de los algoritmos matemáticos y su aplicación en otras áreas del conocimiento. El segundo se refiere a la importancia de la notación matemática una vez que se entiende que la notación explicita la relación de las elaboraciones matemáticas propias de los niños, adolescentes y adultos con las formas típicas escolares de presentación y representación de conceptos matemáticos en elaboración.

Las calificaciones reflejan, en última instancia, lo que la literatura en el área denomina "aprensión conceptual" de las nociones involucradas y que tienen innegable importancia en el proceso de adquisición de los instrumentos acordados para representar las diferentes áreas del conocimiento humano. Sin embargo, se pueden deducir de informes oficiales de evaluación en Brasil, (el SAEB 2004)2, de informes internacionales (PISA 2004), de referencias bibliográficas del área y de datos obtenidos en las investigaciones que se han desarrollado, que hay una gran dificultad. De un lado, los profesores no consideran los registros construidos por los alumnos como herramientas importantes para la adquisición de los registros convencionales, aunque la evaluación se basa en el pasado, también los alumnos persisten en su uso inadecuado, porque desconocen su lógica. Una de las explicaciones recurrente de los profesores es la comprensión textual como un requisito previo para el éxito de la resolución de problemas.

Esa fue una de las razones que llevaron a estudiar la comprensión textual y para eso se adoptó el diseño de Lotman (1988), cuyo análisis se centra en la semiótica de la cultura, y concibe el texto como "un generador de información con los rasgos de una persona inteligente" (1988, p.57), de modo que el texto no lleva en sí mismo un mensaje en un idioma determinado, sino un complejo sistema de almacenamiento de diversos códigos capaces de transformar los mensajes entrantes y generar otros. Este enfoque es tan relevante para el análisis del texto de un problema de física o matemáticas, como el texto científico, literario y periodístico, es decir, si se tiene en cuenta la función semiótica del texto, entonces, necesariamente, se debe reformular la concepción de la naturaleza de la relación entre el lector y el texto: en lugar de la fórmula conocida como "el lector descifra el texto", puede ser más precisa: "el lector se comunica con el texto" (Fávero, 1995, p. 16).

La investigación ha señalado la falta de interacción de los estudiantes con el texto, lo que se denomina impermeabilidad del texto escrito (Fávero y Trajano, 1998). ¿Se podría también hablar de la falta de impermeabilidad textual en referencia al texto de problemas en matemáticas? Será esto lo que significan las exclamaciones de los profesores

3 Existen representaciones de los conocimientos científicos y representaciones que se basan en una práctica, pero lo contrario: representaciones de los conocimientos científicos y las representaciones de lo que es un buen estudiante, fundamentan una práctica.

cuando dicen "Ellos no leen el problema", pero la pregunta que queda por responder es: ¿qué promueve esta impermeabilidad en la escuela?

Esta situación ha preocupado debido a la paradoja que ella engendra, después de todo, la educación en general y la educación matemática, en particular, estaría preparando a las personas a tomar parte en las decisiones sociales y, por tanto, para el ejercicio de la ciudadanía (Fávero, 2005 a, 2008).

La formación de los docentes

Estas cuestiones permiten reflexionar sobre la formación de los docentes en general, y sobre los cursos de licenciatura en particular, y ha llevado a defender la importancia de dos brotes importantes en la formación: la búsqueda de las adquisiciones conceptuales particulares de las áreas del conocimiento o desarrollo de competencias para mediar este conocimiento. Sin embargo, esto requiere una educación que considere la filosofía y la epistemología de la construcción de los saberes particulares y el desarrollo de los procesos psicológicos que subyacen a la construcción, es decir, requiere de una formación basada en la psicología del conocimiento (Fávero, 2007).

La psicología del conocimiento

Basado en el consenso entre los principales teóricos de la Psicología —Piaget (1977), Wallon (1963) y Vygotsky (1979)—, así como otros grandes pensadores —como George Mead (1992) y Bakhtin (1981)— y los pensadores contemporáneos como Bourdieu (1982), Barthes (1992), Bruner (1990,1991), Lotman (1988) y Moscovia (1988), en este artículo se defiende la tesis que apoya la psicología del conocimiento, a saber: el ser humano se desarrolla a través de la construcción de la interacción dialéctica y la adaptación al entorno sociocultural, sustentado con los procesos de internalización y externalización que engendran la conciencia —entendida la externalización como una re-elaboración de la internalización y no una copia— y para el cual el sistema de signos es especialmente importantes, ya que se trata de la representación (Fávero, 2005 a, 2007 a, 2008).

De este hecho, se esbozan cuatro aspectos teóricos-conceptuales. El primero se refiere a la evidencia de la interacción entre los reglamentos cognitivos y las normas sociales cambiando el énfasis de la diada sujeto-objeto a la tríada sujeto-objeto-el otro. Desde el punto de vista de la psicología del conocimiento, se traduce en un consenso que considera la interacción humana como un intercambio de significados y desarma así, la clásica dicotomía entre cuerpo y mente, el individuo y el medio ambiente, pensamiento y lenguaje, la emoción y la cognición (Fávero, 2005a).

El segundo aspecto insiste en el papel de la mediación semiótica en el proceso de desarrollo psicológico humano, lo cual significa comprender que los objetos tienen significados socioculturales y las acciones humanas tienen significados socioculturales, de modo que las prácticas sociales, incluidas las prácticas educativas escolares, tienen un fundamento que les da significado. Ahora, suponer que la actividad humana está mediada conduce al tercer aspecto: considerar los efectos de los sistemas de signos en el desarrollo psicológico de la cognición y las comunicaciones individuales y las formas como las prácticas de las instituciones sociales interactúan con el funcionamiento mental del individuo.

Es decir, la construcción del conocimiento y la adquisición de nuevas competencias dentro de la escuela y la práctica educativa implica mucho más que construir las estrategias cognitivas, implica también la cuestión de identificar cómo y cuáles son los valores sociales que impregnan la información, los procedimientos de las actividades propias que fundamentan sus paradigmas (Fávero, 2007a).

El cuarto aspecto supone la toma de conciencia en relación a que las acciones humanas no son producto del azar; por el contrario, se trata de prácticas sociales con un contenido que les da fundamento. Tanto los objetos como las acciones funcionan en sí mismas como vehículos en la mediación de significados, lo cual incluye las representaciones sociales de las áreas del conocimiento; que existe una interacción entre los paradigmas personales e institucionales; que la creación de un nuevo discurso y una nueva práctica social debe basarse en la transformación de los significados, esto es en las posibilidades de su reelaboración.

Considerar estos aspectos en la práctica de la enseñanza, significa admitir no sólo que el ser humano es activo en su interacción dialéctica sociocultural, también implica cambiar el énfasis de la diada alumno-conocimiento, para la tríada profesor-estudiante-conocimiento, lo cual significa admitir que la actividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje es mediado.

Considerar esta tríada, considerar el contexto de la interacción en las aulas de clase, y considerar que los efectos reguladores siempre son mediados por la red de interacciones entre los alumnos, no significa descartar el impacto de estas regulaciones en el proceso de autorregulación del individuo (Fávero, 2001, 2007b, 2007c). Esto significa que, aunque las regulaciones de una situación en la que la escuela se encuentra en una dinámica sociocognitiva, deben considerar su papel en el aprendizaje desde el punto de vista de las construcciones cognitivas elaboradas y exploradas por cada individuo en esta situación.

Así, en términos de la psicología del conocimiento, se ha mantenido la importancia de la autorregulación en el funcionamiento cognitivo de cada sujeto en la interacción, de modo que la conciencia, con el fin piagetiano, desempeña un papel crucial. Para Piaget (1977) la toma de conciencia "aparece en todos los aspectos como un proceso de conceptualización reconstruido más allá, en términos de semiotización de la representación, que fue adquirido en el plano de los esquemas de acción" (p. 271). Por lo tanto, es un movimiento de internalización a partir de la acción que conduce, en palabras de Piaget (1977), "el plan de acción refleja la conciencia de los problemas a resolver y de los medios cognitivos (y no materiales) utilizados para resolverlos" (p. 263).

El hecho de hacer referencia a los procesos individuales internos no es incompatible con el proceso de mediación semiótica como se mencionó anteriormente. Por el contrario, el análisis de los procesos de internalización y externalización en las teorías de Piaget y Vygotsky, presenta un importante conjunto de principios epistemológicos y metodológicos comunes a los dos autores: para ambos la relación entre el interior —acciones interiorizadas para Piaget, funciones intrapsicológicas para Vygotsky— y externos —acción manifiesta para Piaget y función interpsicológica para Vygotsky— está en constante cambio a través del desarrollo, para ambos, la realidad interna y externa no son dos entidades diferentes, estáticas y definidas, por el contrario: ellas son construidas en las fronteras de lo inestable.

Por lo tanto, para Piaget el conocimiento se basa en el progreso de dos direcciones: en la internalización y externalización, que es compatible con la formulación de Vygotski que, lejos de considerar la internalización como una simple transposición de las propiedades del funcionamiento interpersonal para el plano interno, considera la internalización como una reconstrucción interna, que a su vez altera la función interpsicológica.

Es decir, ambos sostuvieron, que el plano de funcionamiento interno no se da, se construye. Según este marco teórico y teniendo en cuenta la situación de interacción que requiere una clase, se defiende la necesidad de ir más allá de la idea de la transmisión de los procesos de comunicación en el aula, para adoptar la idea de interlocución, lo que implica por lo tanto, considerar la situación de interacción social con el fin de evidenciar las regulaciones cognitivas de los sujetos en su toma de conciencia en función de un campo conceptual particular —y no la memorización de normas— y el análisis de estos procesos a partir de la producción de los procesos de comunicación desarrollados en esta Interacción. Lo que se propone implica la consideración de al menos tres aspectos psicológicos: la formación de conceptos y su sistema lógico de representación, la toma de conciencia de estos conceptos y su lógica, y la interacción social que caracteriza a la situación didáctica en la cual son construidos.

Considerar esta propuesta implica también considerar que la evaluación es más que la medición de las respuestas “ciertas” o “erradas” del alumno. Asumir esta propuesta significa considerar la evaluación como una etapa que alimenta a su propia práctica didáctica, una vez que se considera, para los contextos de enseñanza y aprendizaje, tres tareas distintas y articuladas: 1) evaluar las competencias de los alumnos y sus dificultades y el análisis de la relación entre las competencias y dificultades; 2) la sistematización de la práctica en el aula en términos de objetivos y descripción de las actividades propuestas, teniendo en cuenta la evaluación y el análisis a que se refiere; y 3) un análisis minucioso del desarrollo de las actividades propuestas, evidenciando: a) la secuencia de acciones de los alumnos, b) el significado de estas acciones en relación sus adquisiciones conceptuales, c) la naturaleza de la mediación establecida entre el profesor y los alumnos (Fávero, 2001, 2008). Esta perspectiva se ha adoptado con éxito en investigaciones de intervención tanto en las situaciones del aula en la enseñanza regular, como en las situaciones de inclusión escolar y las situaciones de intervención psiocopedagógica (Fávero, 2001; Fávero y Vieira, 2004; Fávero, 2007a; 2007b; Pina Neves, 2008).

No se trata, por tanto, de defender un procedimiento didáctico particular, se trata de defender la formación de los profesores como instancia para el desarrollo de competencias en lo que respecta a la sistematización de los datos recogidos en la situación didáctica sobre las adquisiciones conceptuales particulares de las áreas del conocimiento, datos que serán la base para la mediación de este conocimiento, y para su evaluación.

Referencias

Bakhtin, M. (1981). *Marxismo e Filosofia da Linguagem (Les Éditions de Minuit* 1977 ed.). (M. Lahud, & Y. F. Vieira, Trads.) São Pablo: Ucitec.

Barthes, R. (1992). *Elementos de Semiología (Élements de Sémioligie*, Paris: Seuil 1964 ed.) (I. Bilkstein, Trad.) São Pablo: Editora Cultrix.

Bourdieu, P. (1982). *Ce que parle veutdire*. Paris: Fayard.

Bruner, J. (1991a). *Actos de Significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza Editorial.

Bruner, J. (1991b). ...*ca la culture donne forme à l´esprit*. Paris, France: Esthel.

Fávero, M. H. (1991). Psicologia: Passado, Presente e Futuro. *Psicologia: teoria e pesquisa*, 7(2), 111-117.

Sección educación científica

Fávero, M. H. (1995). A mediação do conhecimento psicológico na produção de um texto para o professor. Temas em Psicologia. Ensino, Formação e Orientação. *Sociedad Brasileira de Psicologia* (1).

Fávero, M. H. (1995). A relação entre os conceitos de saúde, doença y morte: Utilização do desenho na coleta de dados. Psicologia Teoría e pesquisa, 11(3), 181-191.

Fávero, M. H. (1999). Desenvolvimento congnivo adulto e a iniciação escolar: a resolução de problemas e a notação das operaçoes. *Temas em Psicologia*, 7(1), 79-88.

Fávero, M. H. (2001). Regulasçôes cognitivas e metacognitivas do professor: uma cuestão para a articulação entre a psicologia do desenvolvimento adulto e a psicologia da educação matemática. En S. B. Matemática, & S. B. (Org.), *Anais: Trabalhos Completos. I Simpósio Brasilerio de Psicologia da Educação Matemática* (pp. 187-197). Curitiba: Editora da UFPR.

Fávero, M. H. (2005a). *Psicologia e conhecimento. Subsidios da psicologia do desenvolvimento para a análise de ensinar e aprender*. Brasília: Universidade de Brasília.

Fávero, M. H. (2007a). Semiotic mediation, psychological development process and social representation: towards a theorical and methodological integration. *Europe´s Journal of Psychology* (9).

Fávero, M. H. (2007b). Paradigme personnel et champ conceptuel: implications pour les situations didactiques. En M. Maryvonne, *Activité Humaine et Conceptualisation* (pp. 625-634). Toulouse, France: Presses Universitaires du Mirail.

Fávero, M. H. (2007c). Psychopedagic practice in school inclusion and in research in the development of numeric competence. En E. Macera Martínez, & C. A. Pérez Gamba (Ed.), XII *Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1-9). Santiago de Querétaro: Edebéméxico.

Fávero, M. H. (2009). La psicología del concimiento y la construcción de competencias conceptuales en la escuela. *Revista internacional Magisterio*, (39), 18-22.

Fávero, M. H. (2009). Os fundamentos teóricos e metodológicos da Psicologia do Conhecimento. En M. H. Fávero, & C. Cunha, P*sicologia do Conhecimento. O dialogo entre as ciências e a cidadania* (pp. 9-20). Brasilia, Brasil: Unesco.

Fávero, M. H. (2009a). Introdução: Os fundamentos teóricos e metodológicos da Psicologia do Conhecimento. En M. H. Fávero, & C. da Cunha, (Org.), *Psicologia do Conhecimento: O diálogo entre as ciências e a cidadania* (pp. 9-20). Brasilia: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de BRasília, Liber Livro Editora.

Fávero, M. H. (2010). *Psicologia do Género: Psicobiografia, sociocultura e transformacones*. Curitiba: Editora UFPR.

Fávero, M. H., & Pimenta, M. L. (2006). Pensamento e linguagem: a lingua de sinais na resolucao de problemas. *Psicologia: Reflexao & Critica, 19(2), 225-236*.

Fávero, M. H., & Soares, G. d. (2001). A resolução de problemas em física: revisão de pesquisa, análise e proposta metodológica. *Investigações em ensino de ciências, 6*(2), 143-195.

Fávero, M. H., & Trajano, A. A. (1998). A leitura do adlolescente: mediação semioticae compreensão textual. *Psicologi: Teoria e Pesquisa, 1*, 131-136.

Fávero, M. H., & Vieira, D. O. (2004). A construção da lógica do sistema numérico por uma criança com Síndrome de Down. *Educar em Revista*, (23), 65-85.

Gonzalez, J., Benavidez, J., & Riascos Forero, Y. O. (2009). De Bloomington, USA, a Groningen, Holanda: de Thelen a van Geert, dos perspectivas del desarrollo desde los sistemas dinámicos. En R. Puche Navarro, *¿En La Mente No Lineal?* (pp. 73-109). Cali: Universidad del Valle.

Lotman, Y. M. (1988). The semiotic of culture and the concept of a text. *Soviet Psychology, XXV*(3), 52-58.

Mead, G. (1992). *Mind, Self and Society* (C. W. Morris, Ed.) Chicago: University Chicago Press.

Moscovici, S. (1988). Note towards a description of Social Representations. *European Journal of Social Psychology*, 18, 211-250.

Piaget, J. (1976). *La Toma de Conciencia*. Madrid: Morata.

Pina Neves, R. S. (2008). *A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psico-pedagógica sobre o desenvolvimento de competênciasconceituais de alunos e professores*. Brasilia: Universidade de Brasilia.

Riascos Forero, Y. O., & Fávero, M. H. (2010). La resolución de situaciones problema que involucran conceptos estadísticos: un estudio que articula datos cognitivos, género e implicaciones educativas. UNO *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (24), 27-43.

Riascos Forero, Y. O., & Zúñiga Solarte, Á. H. (2006). La Educación Matemática en contextos socio-culturales. En L. E. Álvare, & M. Aristizabal, *¿Recorre la civilización el mismo camino del sol?: Pedagogía, subjetividad y cultura*. Popayán: Universidad del Cauca.

Vygotski, L. S. (1979). *Consciousness as a problem en the Psychology* of Behavior Soviet Psychology. Summer , Universidad del Cauca.

Wallon, H. (Janvrier-avril de 1963). Psychologie et matérialisme dialectique. Enfacne, Numero special "Henri Wallon, buts et méthodes de la psychologie , 31-34.

Procesos de unitización y de normación en la construcción de un objeto de la transición aritmética-álgebra: la multiplicación como cambio de unidad[1]

Processes of Unitizing and Norming in the Construction of an Object of the Arithmetic-Algebra transition: Multiplication as Change the Unit.

Processos de unitização e de normação na construção de um objeto da transição aritmética-álgebra: a multiplicação como mudança de unidade

Fecha de recepción: noviembre de 2013

Fecha de aceptación: julio de 2014

Jaime Humberto Romero Cruz,

Pedro Javier Rojas Garzón

Martha Alba Bonilla Estévez[2]

Resumen

En este artículo se presenta una posibilidad de acogimiento de la diversidad en el aula de matemáticas. Para ello, se tematiza la multiplicación como cambio de unidad en una relación funcional, vista como elemento de la transición aritmética-álgebra. Se utilizan los conceptos unitización y normación como elementos de análisis de algoritmos usados por antiguas culturas —egipcia, mesopotámica, babilónica y griega— y se reporta evidencia sobre la plausibilidad de promover esta mirada de la multiplicación en el aula. Las diversas formas de construcción de unidades utilizadas por dichas culturas, además de originarias, resultan fecundas para comprender y acoger la diversidad de procesos realizados por niños y jóvenes en la actividad matemática, y posibilitan explicitar y socializar construcciones diversas acerca de la multiplicación, que dan cuenta de un pensamiento relacional, como constructo básico del pensamiento multiplicativo.

Palabras clave: unitización, normación, multiplicación como cambio de unidad, diversidad, pensamiento multiplicativo.

Abstract

In this article a possibility of fostering diversity in the mathematics classroom is introduced. For doing it, multiplication as change of unit within a functional relationship, seen as element of the arithmetic-algebra transition, is thematized. Unitizing and norming concepts as elements of algorithms analysis used by ancient cultures -Egyptian, Mesopotamian,

1 Artículo de investigación.

2 Profesores de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia). Contacto: jaimeedumat@udistrital.edu.co, pedroedumat@udistrital.edu.co, marthaedumat@udistrital.edu.co

Babylonian and Greek- are utilised, and evidence on the plausibility of promoting this view of the multiplication in the classroom is reported. The various forms of building units used by those cultures, beyond originary, are fruitful to understand and embrace the diversity of processes performed by children and youth in mathematical activity, and allow to explicit and socialize various constructions about the multiplication, giving account of a relational thinking as a basic construct of a multiplicative thinking.

Keywords: Unitizing, norming, multiplication as change of unit, diversity, multiplicative thinking.

Resumo

Neste artigo é introduzida a possibilidade de promover a diversidade na sala de aula de matemática. Para fazê-lo, a multiplicação como mudança de unidade dentro de uma relação funcional, vista como elemento de transição aritmética-álgebra, é tematizada. Os conceitos de unitização e normação como elementos de análise de algoritmos usados por culturas antigas -egípcia, mesopotâmica, babilônica e grega- são utilizados, e evidência sobre a plausibilidade de promover essa visão da multiplicação na sala de aula é reportada. As várias formas de construção de unidades utilizadas por essas culturas, além originárias, são frutíferas para entender e abraçar a diversidade de processos realizados por crianças e jovens em atividade matemática, e possibilitam deixar explícito e socializar construções diversas sobre a multiplicação, dando conta de um pensamento relacional como construto básico de um pensamento multiplicativo.

Palavras-chave: unitização, normação, multiplicação como mudança de unidade, diversidade, pensamento multiplicativo.

Introducción

Algunos investigadores, así como algunos estamentos del sistema educativo, han introducido y problematizado el fenómeno de la diversidad en el aula. En el presente es recurrente hablar de diversidad cultural, étnica, social, lingüística y también cognitiva (Alfa III, 2013). En la medida en que distintos Estados pretenden una educación para todos, sus sistemas educativos exigen a los profesores —de manera explícita o implícita— acoger tal diversidad. Desde este punto de vista, para que este acogimiento suceda en el aula de matemáticas se requiere que el profesor pueda comprender y posibilitar la emergencia de distintas formas de práctica matemática, pero además promover su articulación. En el campo del pensamiento multiplicativo, un tratamiento que posibilita acoger la diversidad es abordar procesos de unitización y normación (Lamon, 1994), para reconceptualizar formas de multiplicación como cambio de unidad (Mora y Romero, 2004).

Glasersfeld (1981) describió y tematizó procesos de construcción de unidades, caracterizándolos como primigenios y fecundos. Steefe (1994) describió y analizó producciones de niños (6-8 años) logrando una caracterización de secuencias y tipos de unidades conducentes a la configuración de unidades multiplicativas. Lamon (1994) presentó una teorización acerca de las unidades multiplicativas. El Grupo Mescud (Mora y Romero, 2004; Romero y Rojas, 2007) ha estado en la búsqueda de una caracterización de multiplicación basada en los procesos de unitización y normación. En este artículo se tematiza que una caracterización de la multiplicación, como cambio de unidad en una relación funcional, permite entenderla como elemento de la transición aritmética-álgebra y, además, posibilita el acogimiento de la diversidad en las aulas de matemáticas.

Para Lamon (1994), la *unitización* es el proceso de construir unidades de referencia —o unidad–todo— a partir de agrupamientos de diferente orden, que permite ver simultáneamente los miembros agregados e individuales de un conjunto, mientras que la *normación* es el proceso de reconceptualizar un sistema en relación con alguna unidad fijada o estandarizada. Para incluir procesos de construcción de unidades continuas, no necesariamente realizables mediante agrupamientos —por ejemplo, dadas tres rectas hallar una cuarta proporcional; obtener un rectángulo de lado dado, de igual tamaño que otro rectángulo fijo; dados los ceros de una función, en un sistema de referencia fijo, encontrar los ceros de otra función obtenida mediante una traslación de la primera—. El Grupo Mescud plantea la necesidad de extender estas definiciones y entender la *unitización* como el proceso y el efecto de construir, a partir de unidades dadas, nuevas unidades de referencia permitiendo ver simultáneamente ambos tipos de unidad; y, la *normación* como el proceso y el efecto de reconceptualizar un sistema en relación con alguna unidad establecida, o con un sistema de relaciones entre unidades de referencia. Si se mira la producción matemática desde estos constructos teóricos, se puede identificar que dichos procesos son tan antiguos como las prácticas mismas de hacer matemáticas,[3] y han estado instaurados en diversas culturas.

En este artículo, se intenta mostrar que, en las soluciones dadas a ciertos problemas multiplicativos, por las culturas egipcia, mesopotámica y griega, se pueden ver estrategias y usos diferenciados de unitizar y normar. También se prentende mostrar que estos procesos aparecen recurrentemente en las estrategias que algunos niños y jóvenes, partícipes de aulas que promueven la participación, cuando resuelven problemas multiplicativos escolares. Por ello, se concluye que abordar unitización y normación como procesos iniciales para comprender formas de multiplicación como cambio de unidad, resultan potentes para acoger la diversidad en el aula de matemáticas.

En lo que sigue, se muestra: 1) cómo algunas de las construcciones de multiplicación realizadas por egipcios, mesopotamios, babilonios, griegos, árabes y europeos del renacimiento utilizan nociones como doblar y duplicar, mecanismos para hacer igualdad, construcción de distintas formas y tipos de unidad y un propósito común de elaborar desde las cosas para configurar estructuras matemáticas; 2) que resultados de las investigaciones realizadas con niños y jóvenes, cuando abordan problemas que requieren y promueven procesos de normación y unitización, de construcción de sistema de unidades similares y de unidades múltiples, a través de formas de representación perceptual —inicialmente icónicas—,permiten indicar un camino de construcción de la multiplicación como cambio de unidad.

3 Al respecto, se cuenta con interpretaciones sobre construcciones de unidades y agrupamientos en el Hueso Ishango, que datan de hace 25.000 años (González, Martín-Louches y Silván, 2010).

Construcciones de multiplicación en culturas antiguas

En esta sección se presentan construcciones de multiplicación realizadas por egipcios, mesopotámicos, babilonios y griegos, centrando la mirada en el uso que hacen de unidades diversas, así como en los procesos asociados.

- La multiplicación y la división egipcia: aunque su sistema de numeración fue decimal, desarrollaron el sistema binario. Sus algoritmos para multiplicar y dividir están compuestos de procesos para duplicar, mediar, sumar y restar. Los anteriores hechos están documentados en el papiro de Moscú y en el de Rhind. Los problemas que se presentan a continuación son descritos por Maza (2003):

Prob. 75. 155 panes de (pesu) 20 son cambiados (por panes) de pesu 30. (¿Cuál es el número de panes?)[4]

El procedimiento es de dos fases. En la primera, hay que hallar la cantidad de grano que se emplea en hacer los 155 panes de pesu 20, es una *división*. La primera fila y todas las restantes expresan la relación pesu 20.

Heqats[5]	# Panes
1	20
40	40
80	80
10	10
5	5
155	155

Así que se requiere 7½¼ heqats de trigo para hacer los 155 panes de pesu 20.

En la segunda fase hay que hallar la cantidad de panes de pesu 30 que se puede hacer con 7 1/2 1/4 heqats de trigo, es una *multiplicación*.
La primera fila y todas las filas expresan la relación entre la cantidad de panes a fabricar con 7½ ¼ de heqats de trigo según el pesu.

Pesu	# Panes
1	7 1/2 1/4
2	15 ½
4	31
8	62
16	124
30	232 ½

Para que el pesu sea 30, con 7½¼ heqats de trigo se requiere hacer 232½ panes.

Prob. 34. Una cantidad, 1/2 de ella y 1/4 de ella, añadidas juntas, son 10 (¿Cuál es la cantidad?)

Prob. 69. 3 1/2 heqat de harina hacen 80 panes. Calcular la cantidad de harina en cada pan y su pesu.

Prob. 40. (Dividir) 100 panes entre 5 hombres (de tal forma que las partes estén en progresión aritmética y que) 1/7 de (la suma de) las tres partes mayores sea (igual a la suma de) las dos más pequeñas. ¿Cuál es el exceso (diferencia entre las partes)?

Este autor resalta dos hechos:

(1) Alguno de los repartos anteriores marca la progresión característica de las fracciones Horus, una cantidad para el primero, la mitad para el segundo, la cuarta parte para el tercero, y

(2) [...] la complejidad de [...] los conocimientos matemáticos que mostraban los escribas. En particular, se encuentra una aplicación doble del método de 'falsa posición' en el del papiro Rhind.[6]

4 El *pesu* es una medida que dice sobre la calidad del alimento fabricado respecto a la cantidad de cereal empleado; se calcula como la relación que hay entre la cantidad de unidades de alimento que se fabrican con un heqat. La manera en que se calcula hace que la relación de orden numérico ascendente refiera el correspondiente a la calidad de manera descendente (Nº de panes o de jarras/heqats de grano). En este sentido, el pesu es un descriptor de toda la colección y no de cada elemento en ella.

5 Hace parte del sistema de medidas de capacidad, usado en el antigüo Egipto: hin (jarro = 0.48 lt), heqat (barril =10 hin), khar (saco = 10 heqat).

6 La regla de una falsa posición o regla de falsa posición simple, utilizada por los antiguos egipcios, árabes e indios [...] todavía se puede encontrar en algunos libros de matemática elemental de la primera mitad del siglo XX. En general, la regla de falsa posición simple se usaba para resolver algunos problemas de primer grado con una incógnita, sin necesidad de recurrir al simbolismo algebraico alfanumérico. Para comprender la aplicación de dicha regla, nos apoyaremos en la descripción del científico valenciano Tomás Vicente Tosca [Compendio Matemático (1707-1715)]:
La regla de falsa posición simple se reduce a tres preceptos. 1. Tómese cualquier número, que sea apto, para que en él se puedan ejercitar las operaciones que pide la cuestión. 2. Examínese, si es el número que se pregunta: y si acaso fuere el mismo, quedará satisfecha la cuestión; pero si no lo fuere, se formará una regla de tres, que es el tercero precepto, y se hallará el número que se busca (Pérez, 1987).

Además de esos hechos, se resalta la manera en que los egipcios usaron esta información para resolver el problema: duplicar, mediar, suponer y expresar las cantidades en binario. En la suposición, aparece una relación inicial fijada y tratada como una unidad, expresable de diversas maneras. En el problema 75, suponen un valor probable de la condición pesu 20 como 1(1 heqats, 20 panes), esto es, unitizan; y luego la transforman conservándola mediante duplicaciones, mediaciones y sumas:

> Pesu 20 = (2 heqats, 40 panes) = (4 heqats, 80 panes) = (1/2 heqats, 10 panes) = (1/4 heqats, 5 panes)
>
> = 2(1 heqats, 20 panes) = 4(1 heqats, 20 panes) = 1/2(1 heqats, 20 panes) = 1/4(1 heqats, 20 panes)
>
> = (1+2+4+ ½ + ¼)(1 heqats, 20 panes) = (7+ ½ + ¼) (1 heqats, 20 panes)
>
> = ((7+ ½ + ¼)1 heqats, (7+ ½ + ¼) 20 panes) = ((7+ ½ + ¼) heqats, 155 panes).
>
> Probl. 23. *"Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24"*.
>
> Supongamos que fuera *7* la solución, entonces nos daría: $7 + 1/7 \cdot 7 = 8$, pero como debería obtenerse 24, y como $24 = 3\cdot(8)$, la solución se obtiene de $3\cdot(7 + 1/7 \cdot 7) = 24$. Así que el montón es 21.

La anterior solución fue obtenida por el "método de la falsa posición". Por ello se supuso un valor para el *montón* y si se hubiera verificado la igualdad, ese valor hubiese sido la solución, pero dado que no ocurrió así, mediante cálculos adecuados a partir del supuesto se obtuvo la solución exacta.

Como se puede apreciar, el método lleva a manipular $(7 + 1/7 \cdot 7)$ como una sola unidad. La siguiente proposición de elementos está en relación con el principio aritmético del método.

> Proposición V,4. Si una primera (magnitud) guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.
>
> *Comentario 1.* En los procedimientos anteriores se puede identificar cuatro unidades: 1, 1heqats, 20 panes y (1 heqats, 20 panes); cada una de las cuales es usada como tal, como una entidad. Estas cuatro unidades tienen diferente referente y son de distinta naturaleza; en particular, (1 heqats, 20 panes) es una relación funcional bidimensional (lineal). Tanto la relación como la construcción de unidades las podemos ubicar con respecto a las siguientes proposiciones de Euclides (Libro V):
>
> *Proposición 1.* Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.
>
> *Proposición 2.* Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.
>
> *Proposición 4.* Si una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una

tercera con una cuarta, cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera guardaran la misma razón con cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.

Comentario 2. En la primera fase de la solución del problema 75 hay división, 155 ÷ 20, mientras que en la segunda hay una multiplicación 30(7+1/2+¼). Sin embargo, los procedimientos de obtención de cada respuesta son similares: se basan en escogencias y cambios adecuados de unidad.

Comentario 3. Es importante reconocer que si empezamos con (1 heqats, 20 panes) podemos obtener tanto 155 panes, como cualquier número de panes que con respecto a 20 tenga un divisor común diferente de 1, pues lo importante aquí son los coeficientes de los elementos de la base.[7] De hecho, tanto en los procedimientos referidos como en las proposiciones enunciadas, subyacen procesos de unitización y normación.

- La multiplicación y división mesopotámica: además de su conocida numeración sexagesimal posicional, se destacan manifestaciones de una particular forma de pensar, que hace uso reiterado de la media aritmética para procesos de acotación y cálculo, que genera una técnica de aproximación. La técnica involucra un análisis —al menos implícito— de procesos geométricos, que se manifiesta en la estimación de raíces de números y en la consecución de soluciones de relaciones aditivas entre la «cosa», su cuadrado y una cantidad.

Aaboe (1964) presenta una trascripción de una tablilla escrita en cuneiforme, procedente de la Antigua Babilonia, en la cual aparecen tres números: *a*=30, *c*=42,25,35 y *b*=1,24,51,10. La hipótesis por él sustentada es que estos tres números son respectivamente: "a" longitud del lado de un cuadrado, "*c*" diagonal del mismo y, finalmente, "*b*" una "buena" aproximación de √2, como en el presente se deduce que la relación pitagórica debería ser *c*=30√2, valor que se obtiene en base sesenta aunque aproximada al hacer 30(1,24,51,10). Para Aaboe esta tablilla indicaría que los babilonios sabían la relación pitagórica 1200 años antes que hubiera nacido Pitágoras. En la actualidad se sabe que se trataba de obtener un cuadrado a partir de un rectángulo de superficie 2 unidades.

Supongamos que se debe cuadrar un rectángulo cuya área es 17u^2, con lados *a*=3u y *b*=(17/3)u. El proceso es como se ilustra a continuación:

a0	3	b0	17/3	(3 + 17/3)/2 = (a0+ b0)/2 = a1
a1	(3 + 17/3)/2	b1	17/((3 + 17/3)/2)	[(3 + 17/3)/2 + 17/((3 + 17/3)/2)]/2 = (a1+ b1)/2 = a2
		....	....	....
an+1	(an + bn)/2	bn+1	17/(an+1)	(an+1 + bn+1)/2 = an+2
En todos los casos se cumple que (ap)(bp) = 17				

Figura 1.

7 Es importante precisar que aquí no nos referimos a los términos 0 y 1, sino a los términos de la colección no visible: … ¼, ½, 1, 2, 4, 8,…

a(n)	b(n)
3,0000000000000	252000,0000000000000
126001,5000000000000	5,9999285722789
63003,7499642861000	11,9992857636020
31507,8746250249000	23,9940017851776
15765,9343134050000	47,9514873633090
7906,9429003841700	95,6121739494627
4001,2775371668100	188,9396556419080
2095,1085964043600	360,8404840195170
1227,9745402119400	615,6479432134810
921,8112417127100	820,1245176782230
870,9678796954660	867,9998627094440
869,4838712024550	869,4813383421220
869,4826047722890	869,4826047704440
869,4826047713660	869,4826047713660
869,4826047713660	869,4826047713660

En esta otra aplicación del procedimiento, pero usando base diez, se trata de cuadrar el rectángulo de área 756000 y lados *a*=3, *b*=756000/3. Luego de la décimo segunda iteración, la longitud de los lados del rectángulo coinciden, al menos, en el orden de mil millonésimas (10^{-9}). Por otra parte, se puede notar que cada una de las sucesiones *a(n) y b(n)* de longitudes de los lados de los rectángulos, convergen a . En algunos otros problemas, el uso de esta técnica pone de manifiesto el conocimiento y uso reiterado de la propiedad de que "entre los rectángulos de igual perímetro el de mayor área es el cuadrado".

> *Comentario 4.* En el procedimiento descrito se presenta de manera realmente fuerte el uso de al menos cuatro tipos de unidades. En principio tres de ellas: la de longitud, la de superficie, y la que es iterada, esto es, la media de la suma de las longitudes de los lados del rectángulo (unitización). En tanto proceso recursivo, en cada paso *k*-ésimo, *k* >1, se toma como base la unidad obtenida en el paso *k-1* ésimo. Es decir, aparece un proceso de sustitución de unidades, cada una de las cuales es probable respuesta y debe ser verificada. La cuarta unidad, mucho más compleja, es una secuencia de racionales potencialmente infinita convergiendo a un número irracional.[8]

- La multiplicación y división griega. El desarrollo del concepto de *razón*, unido al de *proporción* y *orden* (lineal), es una de sus formas de pensar, de ver y de expresar el mundo de las matemáticas, con la que operan, predicen y calculan, y que parece extenderse sobre la conformación de otros aspectos de su organización social. Aquellos conceptos son su expresión matemática y su forma de matematizar. Tal vez, el desarrollo de la teoría general de *razones* y *proporciones*, cuya organización algebraica está esquematizada en *Elementos* (libro V), es el mayor legado que el pensamiento matemático griego ha dejado a la comunidad matemática posterior.

Los modos egipcio y mesopotamio de pensar y hacer matemáticas son tematizados, sintetizados y sistematizados desde una perspectiva griega en el trabajo euclideano. Miremos por ejemplo, algunas ideas conexas a las nociones comunes quinta y sexta propuestas en *Elementos* (libro I), que tanto desde el tratamiento técnico operativo como en la elaboración argumentativa juegan un rol importante (Euclides, 1991, p.200):

> 5. Y las mitades de una misma cosa son iguales entre sí
>
> 6. Y los dobles de una misma cosa son iguales entre sí

Ideas como bisecar rectas y ángulos para producir perpendiculares y por lo tanto ángulos rectos;

8 Se trata pues de interpretar la secuencia como la magnitud a ser descrita (proceso de normación).

probar relaciones aritméticas entre cada ángulo externo y sus correspondientes ángulos internos y opuestos (Mescud, 2011). Estas ideas intervienen en la actividad operativa y en la argumentativa para obtener dos relaciones euclidianas supremas: la comúnmente llamada *pitagórica* y la *invarianza* de la suma de los ángulos internos de todo triángulo euclideo. Duplicar y mediar cosas le ayuda a Euclides a conformar su mundo matematizado.

Euclides usa nuevamente el proceso de mediar y duplicar en el Libro II como elemento operatorio, en el Libro III obtiene el ángulo central como el doble del inscrito cuando son subtendidos por el mismo arco de circunferencia. En el libro V define y usa la razón duplicada, aunque como manera de expresar la composición de una razón consigo misma; en el libro VI establece una relación entre mediar ángulos y construir colecciones de pares de segmentos que guardan la misma razón:

> Proposición VI, 3. Si se divide en dos partes iguales el ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también a la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los lados del triángulo que queden; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los lados que quedan del triángulo, la recta dibujada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales al ángulo del triángulo.

En la entrada del libro X la mediación reiterada hace su presencia de forma explícita, a saber:

> Proposición X, 1. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.

Esta proposición procura elementos para una teoría de la aproximación controlada de la convergencia. Además de las ideas asociadas a duplicar y mediar, se encuentran otras ideas que vinculan la multiplicación con la proporción y que proveen una colección infinita de bases posicionales para expresar magnitudes homogéneas con una magnitud dada, ideas sobre las cuales se encuentra evidencia en los trabajos de egipcios y mesopotamios. ¿Cuáles son los otros elementos que intervienen?

1. El “algoritmo” de Euclides para magnitudes.

2. El algoritmo de Euclides para números.

3. Cuarta proporcional.

4. Extrema y media razón.

5. Colecciones de magnitudes continuamente proporcionales.

6. Composición de razones.

7. Relación número magnitud.

8. Colecciones de números continuamente proporcionales.

Todos estos elementos son de carácter multiplicativo, al punto que aparece una forma de potenciación de razones como elemento configurador de las colecciones, de números y de magnitudes en proporción continua, infinitamente numerosas —potencialmente—; colecciones que se comportan bien para el producto.

- Proporción continuada y unidad similar. Euclides inicia la instauración de la proporción continua en el libro V, a través de las siguientes definiciones:

> Una proporción entre tres términos es la menor posible [V, Def. 8].
>
> Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que (guarda) con la segunda [V, Def. 9].
>
> Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción (V, Def. 10).

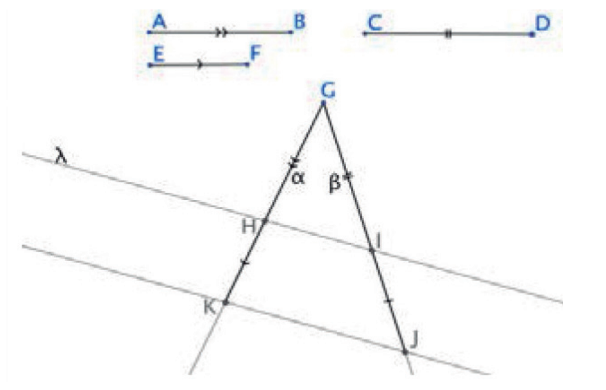
Así mismo establece elementos operativos para comparar colecciones equinumerosas de magnitudes continuamente proporcionales como:

> Una razón por igualdad se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última -entre las primeras magnitudes-, así -entre las segundas magnitudes- la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios (V, Def. 17).

En lo que sigue se presentarán las proposiciones del libro VI, en algunas se explicitan unitizaciones y normaciones a través de formular un problema en la que en cada caso éstas intervengan. Se empieza enunciando la proposición VI, 2:

> Proposición VI.2. Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado que queda del triángulo.

Ahora bien, la proposición VI, 12 puede verse como un problema cuya formulación y solución depende de la proposición VI, 2 según aparece a continuación:



Proposición VI, 12. Dadas tres rectas, encontrar una cuarta proporcional.
Dadas tres rectas: AB, CD y EF, hallar la cuarta proporcional IJ. Esto es: hallar IJ tal que AB:CD :: EF: IJ. Trasladamos AB y EF sobre la dos semirectas α y β, obteniendo las rectas GH y GI, respectivamente. Trasladamos CD sobre α, obteniendo HK y trazamos una recta λ por los puntos H e I. Ahora, desde K trazamos una recta μ paralela a λ, y obtenemos la recta IJ. Así que hemos construido el triángulo GKJ cuyos lados GK y GJ están cortados por la recta λ paralela al lado KJ. Así que, por [VI.2], IJ es tal que GH:HK :: GI:IJ; como AB=GH, CD=GI y EF=HK entonces por [V.7] AB:EF :: CD:IJ. Por todo lo anterior, se ha encontrado IJ la cuarta proporcional de tres rectas dadas AB, EF y CD.

Figura 2.

En relación con unitización y normación se puede ver que, a partir del sistema de tres unidades, AB, EF y CD las tres rectas dadas, dos de ellas relacionadas —guardan razón, definición V, 4—, se configura un sistema de nuevas unidades: un triángulo (GKJ) uno de cuyos lados es la unidad GK=GH, HK debiéndose hallar la unidad GJ=GI,IJ —unidad conocida más unidad a conocer—. La estrategia euclidiana pasa, además, por el uso de rectas paralelas para establecer la misma relación entre tamaños con las unidades rectilíneas GK y GJ así como entre las partes unitarias que las conforman.

En la proposición VI, 2 aparecen en ciernes ideas y elementos de la teoría de semejanza, que dan pie a la configuración de lo que Harel y Confrey (1994) llaman *unidad similar*. Estos elementos se usan con fuerza entre otras en la proporción VI.8.

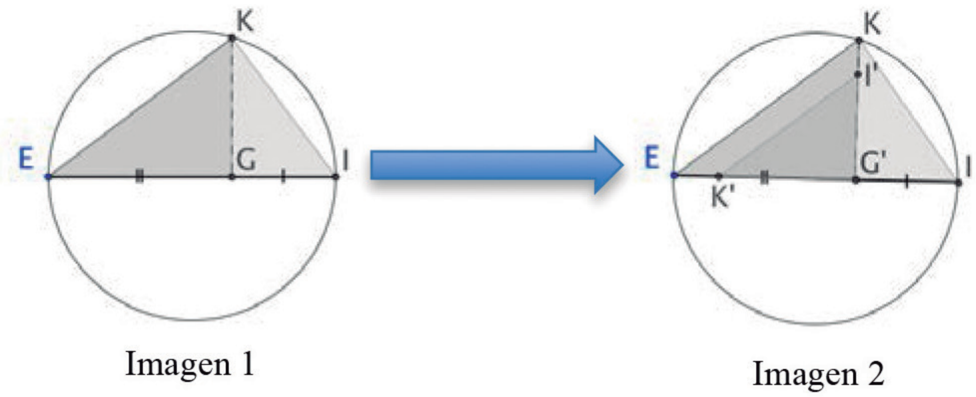
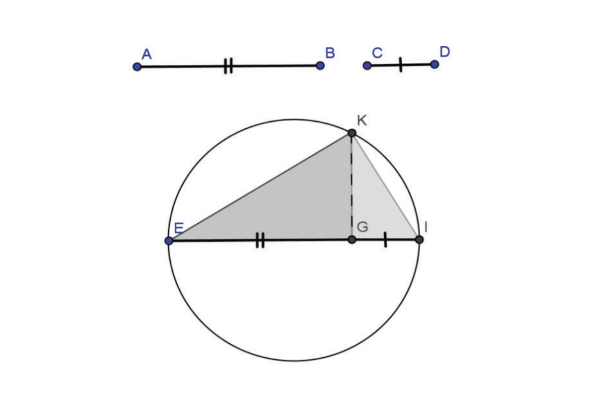


Figura 3. Proposición VI.8. Si en un triángulo rectángulo se dibuja una perpendicular desde el ángulo recto *hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo entero y entre sí.*

Aunque el modo euclidiano de argumentar es otro (figura 3, VI.8), se llama la atención acerca de que si se rota el triángulo GIK alrededor de G un ángulo recto y en sentido contrario a las manecillas del reloj, demostrar esta proposición se transforma en la de demostrar que EK e I'K' son rectas paralelas (ver en la figura 3 las imágenes 1 y 2) por lo que cual aparecen las condiciones de uso de la proposición V.2 obteniéndose que GH:HK :: GI:IJ. Así formulada, la demostración de esta proposición se basa directamente en el uso de la proposición VI.2. De cualquier modo, aparecen unitizaciones y normaciones: se nota que esta proposición pide establecer un sistema de relaciones entre tres unidades dos de las cuales son descomposición de una unidad inicial; dicho de otra manera, aparece un sistema de relaciones entre tres unidades una de las cuales es composición de las otras dos.

Por una parte, la proposición VI.13 puede verse también como el problema de la extrema y media razón cuya formulación y solución depende de la proposición VI.8 según aparece a continuación:



Proposición VI.13. Dadas dos rectas, encontrar una media proporcional.
Dadas dos rectas: AB, CD, hallar la media proporcional GK. Esto es: hallar GK tal que AB: GK :: GK:CD.
Transladamos AB y CD sobre una misma recta obteniendo EG,GI. Hallamos Q punto medio de EI [I.10]. Con radio EQ y centro Q trazamos la circunferencia λ [postulado 3]. Por G trazamos β perpendicular a EI [I.11]. Sea K un punto de corte de β y λ. (Figura Z). La proposición VI.8 asegura la semejanza de los triángulos EKG, KIG, EIK cuyos lados correspondientes respectivamente son EK, KI, EI; EG, KG, EK; KG, GI, KI. Por lo tanto, poniendo en relación las primera diada de cada una de las triadas segunda y tercera, se obtiene que EG:KG :: KG:GI. Dado que EG=AB y GI=CD, entonces [V.7] conduce a que AB:KG::KG:CD. Así, hemos hallado KG la media proporcional de las rectas AB, CD.

Figura 4. Proposición VI.13

Con lo dicho, se sabe que (1) dadas dos líneas rectas JH y MN que guarden razón, es posible hallar ZT tal que JH:MN :: MN:ZT; pero, resulta además que (2) la proporción V.14 al afirmar que:

> Proposición V.14. Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si igual igual y si menor, menor.

Permite ordenar las magnitudes involucradas en las proporciones. Dado que si, por ejemplo, se tiene que JH:MN :: MN:ZT, se cumple que la colección JH, MN, ZT de magnitudes queda ordenada según alguna de las siguientes tres maneras:

- si JH>MN entonces MN>ZT y se obtiene JH>MN>ZT o
- si JH=MN entonces MN=ZT y se obtiene JH=MN=ZT o
- si JH<MN entonces MN<ZT y se obtiene JH<MN<ZT.

Al iterar sobre la proporción continuada, al menos con líneas rectas, lo expresado en 1) y 2) aparece un algoritmo para generar colecciones potencialmente infinitas, de magnitudes ordenadas que, tomadas consecutivamente, guardan la misma razón. Una colección de este tipo, conformada por

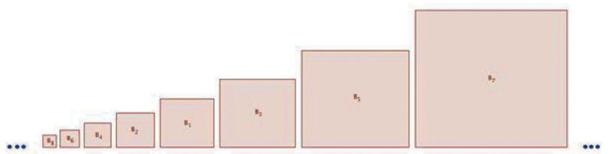


Figura 5.

Figuras similares (cuadrados) aparece en la figura 5:

En la que se tiene que … $B_8:B_6 :: B_6:B_4 :: B_4:B_2 :: B_2:B_1 :: B_1:B_3 :: B_3:B_5 :: B_5:B_7$ …

Se han presentado estas proposiciones VI, 8 y VI, 13 dado que:

1. Brindan un ejemplo paradigmático de unitización y normación que pone en juego unidades similares: todo triángulo rectángulo es partible en dos unidades menores, ordenadas y semejantes —similares— a este trazando una perpendicular a la hipotenusa desde el vértice opuesto. Y dado un triángulo rectángulo puede hallarse un triángulo rectángulo semejante a él tal que al agregarse adecuadamente producen un nuevo triángulo rectángulo mayor y semejante a los dos anteriores.

2. Permiten cuadrar cualquier figura rectilínea. Puesto que: 1) toda figura plana rectilínea es descomponible en triángulos, 2) todo triángulo es paralelogramizable, 3) la proposición I.43 permite, dado un paralelogramo ΔΓ, hallar otro paralelogramo AB, de lado AC, igual a ΔΓ, y 4) otra manera de enunciar la proposición VI.13 es la siguiente: hallar un cuadrado igual a un rectángulo dado.

3. Demuestran la existencia de un tipo de magnitud, a saber: línea recta, en el que dadas dos magnitudes que guardan razón, existe un algoritmo para generar secuencias ordenadas, potencialmente infinitas de estas magnitudes.

4. Con la posibilidad de expresar mediante los elementos de cualquiera de dichas colecciones, cualquier magnitud homogénea con las magnitudes iniciales, con el grado de precisión deseado que otorga la siguiente proposición:

> Proposición X.1. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite

> continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.

Se forma un nuevo tipo de unidad: el de las bases de magnitudes que tomadas ordenadamente dos a dos guardan una misma razón. Así que, al menos entre dos magnitudes que guarden razón, representable como la razón entre dos líneas rectas, es posible generar bases de magnitud tomando como unidad cualquiera de las dos magnitudes dadas.

Todas estas series de proporciones se basan en la composición de razones cuyo comportamiento, aplicado a las colecciones de magnitudes continuamente proporcionales, genera los intervalos de equimultiplicidad de razones. De similar manera, estos dos hechos se presentan en nuestra base de numeración, la base diez: 1:10::10:100::100:1000, de la que se obtiene $(1:10)^3 :: 1:10^3$ pudiéndosele generalizar inductivamente sobre el orden de composición (exponente) *n,* así: para todo *n* N, $(1:10)^n :: 1:10^n$ y, a su vez, ésta se puede generalizar inductivamente sobre la base *k*, así: para todo *k* N, para todo *n* N, $(1: k)^n :: 1: k^n$

Dichas proporciones y generalizaciones refieren hechos particulares de la relación entre el universo de las magnitudes y el universo de los números propuesta en la proposición X.5.

> Proposición X.5. Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Esta proposición hace posible que todas las que refieren propiedades de secuencias de números cuyos elementos consecutivos guardan la misma razón, también describan propiedades de secuencias de magnitudes en proporción continuada. Por ejemplo, la proposición 8 del libro VIII:

> Si entre dos números caen números en proporción continua (con ellos), entonces cuantos números caen entre ellos en proporción continua, tantos caerán también en proporción continua entre los que guardan la misma razón (con los números iniciales).[9]

Que parafraseándola en términos de magnitudes dice que si, en una colección de magnitudes continuamente proporcionales, se extraen dos subcolecciones de tal manera que la primera y la última de la primera subcolección guarden la misma razón que la guardada por la primera y la última magnitud de la segunda subcolección, entonces las dos subcolecciones de magnitudes son equinumerosas.

Para Vega (1991, p.87) el libro VIII puede verse como una teoría de las series geométricas de razones. Desde nuestro punto de vista, hace parte de una aritmetización de la teoría de las magnitudes conmensurables. Pero como se ha argumentado, a través de los procesos unitización y normación además, la proposición X.1 permite ampliar dicha aritmetización, modelación, que incluye una manera de expresar las magnitudes —conmensurables o inconmensurables— que guarden razón, fijando una unidad para generar a partir de ella, una base de magnitud manteniendo la razón dada.

> *Comentario 5.* La proporción continua es el principio formador de las bases posicionales tanto de numeración como de magnitud; las definiciones V.9 y V.10 revelan la estructura de multiplicación repetida que hay en ellas.[10]

9 En realidad nos parece que se debe omitir el contenido del último paréntesis. No es necesario y en cambio es inconveniente puesto que modifica el sentido inicial.

10 En la tabla siguiente la notación io refiere el i-ésimo elemento de la colección.

$(1^{o}: 2^{o})$ ::	$(2^{o}: 3^{o})$ ::	$(3^{o}: 4^{o})$ ::	$(4^{o}: 5^{o})$ ::	$(5^{o}: 6^{o})$ ::	$(6^{o}: 7^{o})$ ::	....	$(1^{ero}: 2^{o})$
$(1^{o}: 3^{o})$ ::	$(2^{o}: 4^{o})$ ::	$(3^{o}: 5^{o})$ ::	$(4^{o}: 6^{o})$ ::	$(5^{o}: 7^{o})$ ::	$(6^{o}: 8^{o})$ ::	....	$(1^{ero}: 2^{o})^2$
$(1^{o}: 4^{o})$ ::	$(2^{o}: 5^{o})$ ::	$(3^{o}: 6^{o})$ ::	$(4^{o}: 7^{o})$ ::	$(5^{o}: 8^{o})$ ::	$(6^{o}: 9^{o})$ ::	....	$(1^{ero}: 2^{o})^3$
$j^{o} : (j+k)^{o} :: (j^{o} : (j+1)^{o})^{k}$							

Tabla 1.

Unitización y normación en trabajos de aula

En esta sección se presentan evidencias sobre la construcción de unidades múltiples de referencia por parte de niños y jóvenes (10-13 años) para resolver situaciones problema. Así como la reinterpretación que estos realizan de las situaciones a partir de dichas unidades, esto es, el uso de procesos de unitización y normación (Lamon, 1994) en la resolución de problemas, sustentados en habilidades básicas requeridas para recuperar la unidad. En este contexto, se les solicita a los estudiantes encontrar procesos de solución, trabajando en grupo y exponiendo sus hallazgos a los demás, en un ambiente regulado por normas sociomatemáticas (Rojas et al., 2011, pp. 74-75), con la intención explícita que, como producto de su actividad matemática, generen métodos para resolver los problemas y no que apliquen procedimientos previamente aprendidos.

Problema de los extraterrestres

Considere los siguientes cuadros que relacionan extraterrestres y porciones de comida.

Sobre la línea doble, usted puede ver algunos extraterrestres y la cantidad de raciones de comida que necesitan para vivir por un día. Asuma que todos los extraterrestres comen la misma cantidad. Diga si cada uno de los grupos de extraterrestres bajo la línea doble, tiene más raciones, menos raciones o el número correcto de raciones de comida requeridas para vivir por un día.

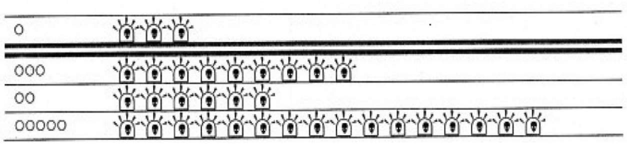
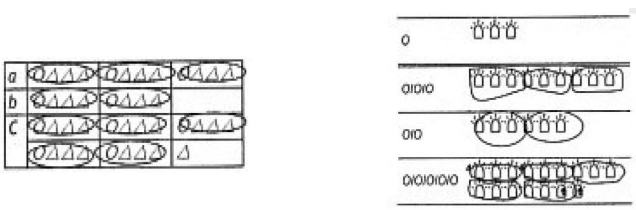


Figura 6. Fuente: tomada de Delgado, Olaya y Velásquez (2005, p. 83)

Algunas de las soluciones:
Descripción. Realiza un proceso de unitización a partir del patrón (rata) extraterrestres–raciones de comida, haciendo un esquema premultiplicativo [Respuestas 1 y 2 en la Figura 6].



a. correcto
b. correcto
c. sobra 1 extraterrestre

En el último (último) sobra un extraterrestre

Figura 7.

Fuente: Delgado, Olaya y Velásquez (2005, p. 36)

Si bien, en principio, éste podría considerarse un problema típico, la manera icónica —en registro figural— en que se presenta la información de la relación dada, en un *formato* en el que no se pide un valor desconocido, hace que se conserve la relación visualizada desde el inicio (1 a 3) usando la *instrumentación* dispuesta. Algunos manteniéndose en lo icónico y otros estableciendo correspondencias. Si bien todos reconocen unidades múltiples, las maneras de unitizar son diferenciadas, mientras en el primer caso de la figura 3 el estudiante combina las unidades —ración y extraterrestres— para formar una nueva unidad *mezcla,* con la cual reinterpreta la situación, en el segundo arma unidades diferenciadas, siempre explicitando la relación 1 a 3.

Respuesta 3	Descripción	Respuesta 4	Descripción
Primero que todo por cada 3 extraterrestres hay una racion (ración) es decir: extraterrestres: 3, 6, 9, 12, 15, 18 Racion (ración): 1, 2, 3, 4, 5, 6 En el grupo 1 y 2 tiene el numero correcto En el grupo 3 tiene menos raciones	Unitiza a partir de unidades iterables utilizando un esquema iterativo de la multiplicación.	3 ext. Se comen 1 plato (correcto) 9 " " " 3 platos (correcto) 6 " " " 2 platos (correcto) 16 " " " 5 platos (incorrecto Contando y sumando de 3 en 3.	Realiza un proceso de normación, a partir de la unidad compuesta iterable extraterrestres-raciones de comida mediante un doble conteo. Usando un esquema multiplicativo iterable.

Figura 8.

Fuente: Delgado, Olaya y Velásquez (2005, p. 83)

Respuesta 5	Respuesta 6	Descripción
1) tiene el numero [número] correcto de porciones 3x3=9 2) tiene el numero [número] correcto de porciones 3 x 2 = 6 Extraterrestre por porción Nº de porción. 3) tiene menos porciones hace falta $\frac{1}{3}$ de porción porque 3x5=15= 16 -15 01	9 extraterrestres comen 3 porciones 6 extraterrestres comen 2 porciones 16 extraterrestres comen 5 porciones 1 x 3 = 3 — 3 extraterrestres comen una porcidn [porción] 3 x 3 = 9 — 9 extraterrestres comen 3 platos 2 x 3 = 6 — 6 extraterrestres comen 3 platos de comida	Realizando un proceso de normación a partir de la unidad compuesta iterable extraterrestres-raciones de comida, identificando operadores escalares en el espacio de medida de los extraterrestres para luego utilizarlos en el espacio de las raciones. Usando un esquema multiplicativo de coordinación de unidades reversibles parte todo.

Figura 9.

Fuente: Delgado, Olaya y Velásquez (2005, p. 37)

En las respuestas presentadas en las figuras 8 y 9 se evidencia un desprendimiento de lo icónico, pero manteniendo la coordinación entre los dos tipos de unidades: una ración de alimento por cada tres extraterrestres (unidad múltiple), usando esquemas multiplicativos diferenciados, en unos casos haciendo uso de un doble conteo y en otros manteniendo la relación 1 a 3.

Problema de los granos y la construcción de unidades de similaridad

A un grupo de estudiantes de 4º grado (10-11 años) se le presentó la tarea denominada *Granos.* En ella se entregó un número de granos de arveja y se les dispuso una tabla, como la abajo presentada, para organizar la información que se pedía generar.

1. Tengo en cuenta la cantidad de arvejas iniciales, y elijo un número del 2 al 6 con el que puedo hacer una cantidad de grupos sin que me sobren ni me falten arvejas, los grupos deberán tener como cardinal el número escogido.

- ¿Cuántos grupos tengo inicialmente?
- ¿Cuál es el número de elementos que tiene cada uno de los grupos?
- ¿Cuántos grupos tengo después de hacer las agrupaciones con el número escogido? ¿Por qué?

2. Realizo grupos de los grupos, con la cantidad escogida inicialmente.

Cantidad de elementos	**Número de elementos por grupo**	**Cantidad de grupos**	**Número de grupos de grupos**		
			1ª	2ª	3ª

3. Escribo los procedimientos llevados a cabo durante el desarrollo de la actividad.

4. Represento cada uno de los pasos seguidos al realizar las agrupaciones.

Esta actividad requería escoger de entre los números 2, 3, 4, 5, 6 uno que al multiplicarse de manera repetida obtuviera el número total de granos o uno que empezando por dividir el número total de granos y continuara dividiendo a los cocientes respectivos, en el proceso obtuviera residuo 0.

Los estudiantes probaron haciendo uso de la división para escoger el número: “Nosotros escogimos el número 3, porque a 81 lo divido en 3 y me salen 27 grupos de 3”

Algunos hicieron división repetida:

9	3		27	3		81	3		243	3
-9	3		-27	9		-21	27		-243	81
0			0			0			0	

“Nosotros tenemos 243 que es la cantidad de elementos. Y tenemos 3 que es el número de elementos por grupo, tenemos 81 que es la cantidad de grupos, 27 es cuando se agrupa una vez, 9 es cuando se agrupa dos veces y 3 es cuando se agrupa tres veces”.

Durante este proceso que modela la acción de agrupar manteniendo la cardinalidad de la unidad, generaron en cada paso una nueva unidad logrando predominio de la acción sucesora *dividir por* sobre la unidad convencional del conteo. Una exigencia implícita que aparece en la configuración de la actividad es la coordinación entre los momentos de la situación y lo que resulta cada vez que se ejecuta la acción sucesora.

En cuanto a las representaciones de las agrupaciones formadas desde la colección inicial de granos, notamos que los agrupamientos conducen a usar la menor unidad para generar de manera progresiva nuevas unidades de orden superior. La naturaleza de los objetos involucrados en la situación amplió la posibilidad de mantener y diferenciar al mismo tiempo en el campo visual tanto el uno anterior como el uno nuevo. De esta manera pudieron mantener control frente a distintos elementos que vinculan una situación de carácter recursivo; ellos avanzaron como aparece en Romero (2002, p. 93):

> Mediante "uno más" al tiempo que se vuelve al uno originario reconstruyendo su estructura, el uno es ahora una colección [...]. Con lo cual aparecen dos significados usuales de la palabra «recurrir», "volver una cosa al lugar de donde salió" y "emplear medios no comunes para el logro de un objetivo" (Ezquerra, 1995).

Aunque no toda situación en la que se reconstruya el uno y se actúe con esta reconstrucción recoge procesos infinitos, necesarios para un significado más cercano a la recursión en matemáticas y al dominio numérico de lo continuo (Lakoff y Nuñez, 2000), una representación como la siguiente, realizada por el estudiante Selio (10 años) en clase, sí lo permite

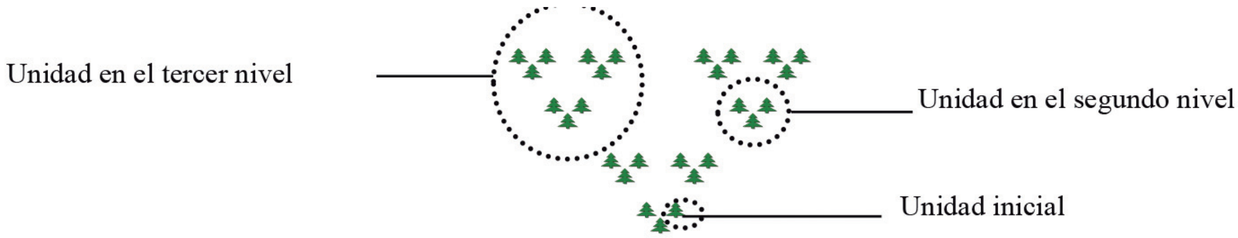


Figura 10.

Pues muestra que las unidades obtenidas para la agrupación de los elementos de la situación son diferenciables pero se coordinan en una misma estructura, es decir la unidad inicial —un grano— es diferenciable con la unidad utilizada en el segundo nivel —grupo de tres unos de primer nivel—, la unidad del segundo nivel es diferenciable con la unidad utilizada en el tercer nivel —un grupo de tres unos de segundo nivel—, y el todo como una unidad de cuarto nivel manteniendo la misma estructura de la unidad anterior de manera visible por la disposición espacial de la representación (Narváez y Urrutia, 2005, p. 63) y al retornar a la forma anterior genera condiciones para la compresión de una noción general de límite mediante la metáfora básica del infinito Lakoff y Núñez (2000, pp. 186-207).

Problema del café y los buñuelos

Para unas onces hay en la mesa tres tazas de café y cuatro buñuelos. Pero llegan cinco comensales. Si a cada comensal se le debe dar una taza de café, y se quiere mantener la relación inicial entre el número de tazas de café y la cantidad de buñuelos, ¿Cuántos buñuelos debe servirse?

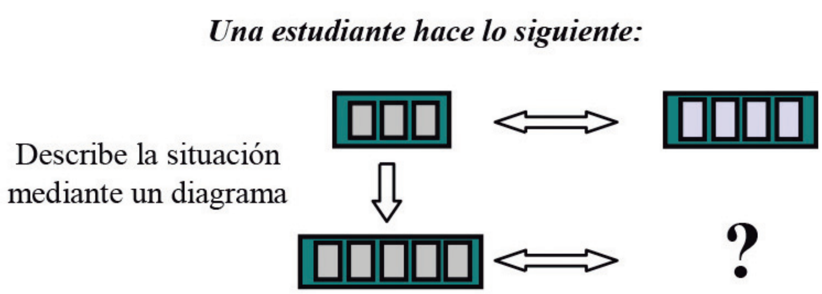


Figura 11.

Esta estudiante (12 años), operando sobre los elementos de la representación, obtiene una solución usando procesos de normación y unitización, que sintetizamos así:

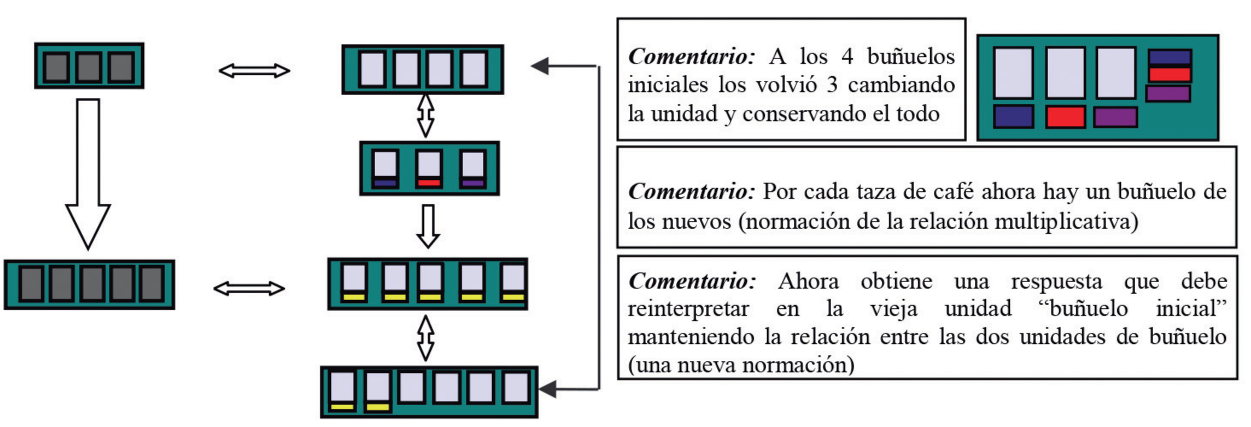
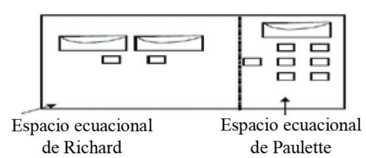


Figura 12.

Problema de los sobres

El siguiente problema verbal, propuesto por Radford (2002) como inicio al trabajo con ecuaciones, se usó en una experiencia realizada con estudiantes de un programa de formación para ser profesor de matemáticas (Romero y Rojas, 2011), en la cual se les pidió resolverlo *sin usar álgebra*.



Determinar el número de tarjetas que hay en cada sobre sabiendo que ambos jóvenes tienen la misma cantidad de tarjetas, y que en cada sobre el número de tarjetas es el mismo.

Una de las soluciones estuvo orientada por un sistema de equivalencias de las cantidades, "quitando" lo mismo a cada lado, marcando o "tachando" los objetos equivalentes en los respectivos "espacios ecuacionales". Otra de las soluciones consistió en construir en cada espacio ecuacional una unidad común entre sobres y boletas, la máxima posible —unitización y normación—, y quitarla utilizando el procedimiento antes mencionado, así:

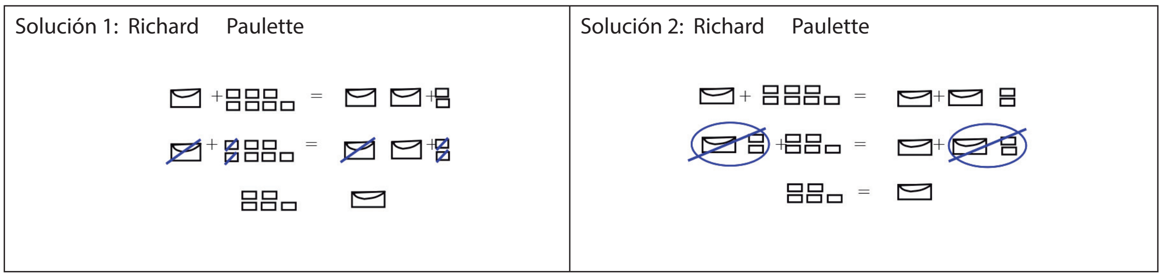


Figura 13. Soluciones 1 y 2

En la socialización de estas soluciones, algunos estudiantes no sólo reconocieron que en ellas se usó álgebra, argumentando que "se está trabajando con igualdades y realizando cancelaciones como en álgebra", sino también la importancia del uso del *sobre* —representación icónica—, en tanto posibilidad de "representar y manipular lo desconocido". Es decir, se trata al menos al inicio, de operar con representaciones que refieren cosas, ¿es casualidad que mesopotámicos, babilonios, griegos y árabes usaran precisamente esta palabra —aunque con diversas interpretaciones de entrada— para eregir sus construcciones matemáticas?

En una línea de pensamiento cercana con esta reflexión, Radford (2002, p. 35) sugiere lo siguiente:

> entre la amplia variedad de signos, desde un punto de vista didáctico, los íconos pueden ser artefactos transicionales útiles para redesignar cantidades desconocidas antes de que un tratamiento formal pleno sea posible para los estudiantes. Verdad, los íconos tienen obvias limitaciones. Por una cosa, no es posible escribir un compendio de la sintaxis de los íconos. Pero, para nuestros propósitos, esto puede no ser necesario, como no fue necesario para los escribas babilonios que maravillosamente manejaron para resolver, mediante métodos icónicos, ecuaciones de segundo grado [Traducción libre].

Conclusiones

En las secciones anteriores, a partir de soluciones dadas a problemas, se ha explicitado la diversidad de formas de pensar y razonar, así como la construcción de los procedimientos requeridos en la actividad matemática, ligadas a hechos culturales. En antiguas culturas y en contextos escolares actuales, a partir de acciones como doblar, mediar, partir y comparar, se pueden reconocer construcciones y usos de unidades diversas para dar solución a los problemas, en otras palabras, reconocer la *unitización* y la *normación* como procesos que posibilitan, en particular, la construcción de un objeto de la transición aritmética-álgebra: la *multiplicación como cambio de unidad* en una relación funcional.

Autores como Kieran (1992), para quien el álgebra no es una aritmética generalizada, hace explícita la ruptura existente entre estos dos campos conceptuales, llamando la atención sobre la necesidad que los estudiantes cambien sus formas aritméticas de pensar desplazándose a unas formas algebraicas en las que se razona sobre operaciones y relaciones y la generalidad de las mismas. Butto y Rojano (2004, 2010) reconocen una conexión entre la aritmética y el álgebra, proponiendo como rutas de acceso al pensamiento algebraico el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. En investigaciones como las referidas anteriormente se reconoce la dificultad que encuentran los estudiantes para comprender, por ejemplo, la diferencia entre la expresión aritmética 2+3 y la expresión algebraica $x+y$ (conflicto proceso-producto). Así como dificultades asociadas con el uso del signo igual y con las interpretaciones de la letra en contextos matemáticos (Küchemann, 1981);[11] evidencias que les permiten concluir que para evitar la persistencia de tales dificultades se requiere crear "puentes" entre la aritmética y el álgebra escolar, creados, por ejemplo, a partir de la introducción en el currículo del álgebra temprana (early algebra) (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2007).

Rojas, y otros autores (2011), por su parte, han planteado abordar la problemática de la transición aritmética-álgebra desde otra perspectiva. Para dar

11 Una descripción y análisis de dificultades como las referidas puede consultarse en Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo y Mora (1997).

una imagen de ello se acudirá a una metáfora de tipo geográfica: no se trata de un "puente" entre dos "terrenos" claramente diferenciados y separados en la matemática escolar: la aritmética y el álgebra. Se trata más de un terreno, en el cual podemos reconocer dos secciones claramente diferenciadas en cuanto a su composición y una sección compartida, con componentes "difusos" de ambos terrenos; otra metáfora podría ser la siguiente: si bien se diferencia la zona continental de la zona del mar, no es posible definir unívocamente su frontera ya que no está claramente definida, y varía permanentemente.

Resulta posible entonces conceptualizar la transición aritmética-álgebra como un campo conceptual, asociado a conceptos como razón, proporción y proporcionalidad, y a procesos como unitización y normación. Sin embargo, la organización curricular incentiva que los esquemas de pensamiento elaborados y la instrumentación usada por los estudiantes para resolver problemas multiplicativos relacionados con dichos conceptos se vean como disconexos (Mora, Romero, Bonilla y Rojas, 2006; D'Amore, 2006; Mescud, 2005; Harel, Behr, Post y Lesh, 1994; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985) generando así unos aprendizajes de conocimientos desarticulados (ver, por ejemplo, resultados en pruebas como TIMSS y PISA). Estos resultan posibles de conectar desde un tratamiento distinto, proponiendo procesos de formación que pueden originarse en lo aritmético y progresivamente acercarse a procesos algebraicos (Rojas et al., 2011).

Reconocer o no una continuidad entre aritmética y álgebra depende de la manera en que se aborde la actividad matemática, constituida por objetos, procesos y procedimientos cuya conformación se origina en la aritmética escolar y que pueden evolucionar hasta llegar a ser un objeto claramente algebraico. Por ejemplo, $x+y$ puede verse como un objeto de la transición aritmética-álgebra; en el siguiente sentido: para realizar la suma de los números 2 y 3, es decir, 2+3 (proceso), se dispone previamente de una unidad común, el uno (3 unos y 2 unos), y obtenemos como resultado (producto) el 5, diferenciando claramente proceso de producto. Ahora, si se requiere sumar dos racionales la unidad no está dada de antemano y se debe establecerla en cada caso (puede variar), para sumar ½ y ¼ se puede tomar ¼ como unidad (2 de ¼ y 1 de ¼; también se podría haber escogido 1/8 ó 1/32), obteniendo como resultado ¾, aunque para sumar ½ y 1/3 no sirve la unidad anterior y es necesario encontrar otra (si se toma 1/6, se obtiene como resultado 5/6). Sin embargo, para sumar dos números reales cualesquiera, como 2 y $\sqrt{3}$, no disponemos de una unidad común, ni es posible encontrarla, y la expresión $2+\sqrt{3}$ representa tanto el proceso como el producto, y se debe aceptar que $2+\sqrt{3}$ es una expresión adecuada para sumar 2 y $\sqrt{3}$.

Así, la propuesta de incluir *la multiplicación como cambio de unidad* (Mora y Romero, 2004; Mescud, 2006; Rojas et al., 2011) como un objeto de la transición aritmética-algebra, asumiendo que: 1) al multiplicar, esencialmente se expresa una cantidad, no necesariamente entera, de una cierta unidad, en términos de otra unidad, y que al llevar a cabo tal cambio de unidad, se realizan unitizaciones o normaciones; 2) dichas expresiones de relaciones entre cambios de unidad emergen y permiten la emergencia de *formas de variación lineal*; lo que induce a proponer un camino de relaciones entre aritmética y álgebra, que posibilita el logro de mejores aprendizajes, utilizando ideas culturalmente sedimentadas involucradas en los procesos de unitización y normación.

Como se ha mencionado, y desde las evidencias aquí presentadas, se puede afirmar que cuando los estudiantes participan en ambientes en los cuales se reconoce la diversidad y se privilegia la comunicación y la interacción en la resolución de problemas, emergen diversas formas de pensar, de proceder, de expresar que no sólo resultan eficaces sino generalizables y potentes, de hecho, son posibles de relacionar con producciones matemáticas de antiguas y nuevas culturas. Esto permite cuestionar el hecho que, aún en el presente, en contextos escolares se pretenda privilegiar formas únicas para el trabajo matemático escolar. Si bien, desde los referentes curriculares (MEN, 1998), se promueve el reconocimiento de la diferencia, de la importancia de formas alternativas de organización curricular, se requiere de formas de organización que no sólo acojan estos referentes sino que promuevan y potencien la diversidad. Es decir, que posibiliten otras formas de hacer y de ser de los niños y jóvenes en la actividad matemática. En este sentido, se pone en discusión la influencia de no reconocer la diversidad en la acción curricular en la restricción de posibilidades de desarrollo del pensamiento aritmético algebraico de nuestros estudiantes.

Referencias

Aaboe, A. (1964). *Matemáticas: episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo.* (A. Linares, Trad.) Cali: Norma.

Alfa III. (2013). *Orientaciones específicas para la incorporación de tecnología en procesos de formación de profesores de ciencias naturales, lenguaje y comunicación, y matemáticas en contextos de diversidad para el diseño de secuencias de enseñanza aprendizaje.* Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Recuperado de http://www.dri.pucv.cl/wp-content/uploads/2013/04/Libro-Red-Alternativa.pdf

Butto, C y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación matemática, 16* (1), 113-148.

Butto, C y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22*(3), 55-86

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* (A. Balderas, Trad.). Bogotá: Magisterio.

Delgado, M., Olaya, L. y Velásquez, M. (2005). *Procesos de unitización y normación en problemas de razón y proporción.* Trabajo de grado inédito. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Summa*, *5*, 23-33.

Euclides (1991). *Elementos I-IV.* (M. Puertas, Trad.). (Original escrito 300 a. d. n.e.). Madrid: Gredos

Euclides (1994). *Elementos V-IX.* (M. Puertas, Trad.). (Original escrito 300 a. d. n.e.). Madrid: Gredos

Euclides (1996). *Elementos X-XIII.* (M. Puertas, Trad.). (Original escrito 300 a. d. n.e.). Madrid: Gredos

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education. 16*, 1, 3-17.

Glasersfeld, V. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and number. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 83–94.

González, F., Martín-Louches, M. y Silván, E. (2010). Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. *Dynamis*, *30*, 167-195.

Harel, G., Behr, M., Post, T. y Lesh, R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems. In G. Harel y J. Cofrey (Ed.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. New York: State University of New York.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan.

Küchemann, D. (1980). The meanings children give to the letters in generalised arithmetic. In W. Archenhold, R. Drive, A. Orton y C. Wood-Robinson (Eds.), *Cognitive development research in science and mathematics*. Leeds, UK: University of Leeds

Lamon, S. (1994). Proportional reasoning. Unitizing and Norming. In G. Harel and J. Cofrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. New York: State University of New York.

Maza, C. (s. f.). *Matemáticas en Egipto*. Acceso: abril de 2008. Recuperado de http://www.personal.us.es/cmaza/egipto

Mescud (2006). *El pensamiento multiplicativo. Una mirada a su densidad y complejización en el aula.* Informe final de investigación. COLCIENCIAS-IDEP y Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Cód. 1130-11-14040).

Mora, O. y Romero, J. (2004). ¿Multiplicación y división "o" cambio de unidad? En P. Rojas (Ed.), *Memorias del Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Bogotá: ASOCOLME. Recuperado de http://www.asocolme.org/

Mora, O., Romero, J., Bonilla, M. y Rojas, P. (2006). Modelos MADA y Regla de tres: complementos inconexos funcionales. 210-213. In S, Sbaragli (Ed.). *La Matematica e la sua Didattica: Vent'anni di impegno.* Roma (Italia): Carocci Faber.

Narvaez, D. y Urrutia, E. (2005). *La Construcción de Esquemas Splitting; un experimento de enseñanza.* Trabajo de grado inédita. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D. C.

Pérez, J. (1987). *Diálogos* a*ritmética, práctica y especulativa.* Recuperado el 10 de abril de 2008, de http://campus-virtual.uprrp.edu/postgrau/activitats/tutormates/37/webs/ajudes/inversi%F3n.pdf

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Iberoamérica. Recuperado el 3 de marzo de 2008, de http://www.uv.es/~didmat/luis/mexico96revisado03.pdf

Radford, L. (2002). Algebra as tekhne: artefacts, symbols and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1* (1), 31-56.

Rojas, P., Romero, J., Mora, L., Bonilla, M., Rodríguez, J. y Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: Estrategias para promover su aprendizaje.* Bogotá: Universidad Distrital.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, C., Castillo, E. y Mora O. (1997). *La Transición aritmética-álgebra.* 1 Ed. Bogotá: Universidad Distrital.

Romero, J. (2002). La recursión como modeladora de situaciones. *Revista Científica*, *4*, 91-98.

Romero, J. y Rojas, P. (2011). *Un* caso de toma de conciencia de la indeterminancia; 192-195. In S. Sbaragli (Ed.), *La Matematica e la sua Didattica: Quarant'anni di impegno.* Bologna: Pitagora.

Romero, J. y Rojas, P. (2007). Estrategias para promover el aprendizaje de la multiplicación como cambio de unidad. En G. García (Ed.), *Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Bogotá: ASOCOLME-Universidad del Valle. Recuperado de http://www.asocolme.org/

Romero, J., Bonilla, M. y Rojas, P. (2011). Razonamiento Matemático y Algoritmos: Una Mirada desde los Elementos de Euclides. En G. García (Ed.), *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Armenia. Colombia. Recuperado de: http://www.asocolme.org/

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: from children's ideas to classroom practice*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L. (1994). Children´s multiplying and dividing schemes: An overview. In Harel y Cofrey (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. New York: State University of New York.

Vega, L. (1991). Introducción. En Euclides. *Elementos I-IV* (M. Puertas, Trad.). Madrid: Gredos.

Prácticas didáctico-matemáticas en Educación Matemática.[1] Desarrollo de las prácticas docentes en LEBEM

Mathematical teaching in Mathematics Education. Development of teaching practices in LEBEM

Ensino de matemática na Educação Matemática. Desenvolvimento de práticas de ensino em LEBEM

Fecha de recepción: noviembre de 2013

Fecha de aceptación: julio de 2014

Jorge Orlando Lurduy Ortegón[2]

Resumen

A partir de la investigación sobre desarrollo de las prácticas docentes, en el programa de formación de profesores de matemáticas para la educación básica en Colombia (LEBEM-UD), se enuncia el modelo teórico-metodológico construido para el análisis de la información dispuesta en los textos producidos por los estudiantes para profesor en sus prácticas docentes, entre los años 2005-2012. También se reportan las conceptualizaciones logradas en el proceso investigativo y referidas a los objetos didácticos, prácticas didácticas, prácticas didáctico y prácticas matemáticas. Finalmente, se aportan una sistematización y conceptualización de los análisis, reflexiones y significados didácticos logrados por los estudiantes para profesor de matemáticas.

Palabras clave: educación matemática, formación de profesores de matemáticas, práctica didáctica, objetos didácticos, conocimiento pedagógico y didáctico.

Abstract

From research on “the development of teaching practices” in the training program for mathematics teachers for basic education in Colombia (LEBEM -UD) , built for the analysis of information theoretical and methodological model states willing in the texts produced by the student teachers in their teaching practices , between 2005-2012. Conceptualizations achieved in the research process and referred to the learning objects, instructional practices, teaching practices and mathematical practices are also reported. Finally are provided a systematization and conceptualization of analysis, reflection and didactic meanings made by student teachers of mathematics.

Keywords: Mathematics education, training teachers of mathematics, teaching practice, learning objects, pedagogical and didactic knowledge.

1 Artículo de investigación.

2 Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia). Contacto: jolurduy@udistrital.edu.co

Resumo

A partir de pesquisas sobre "o desenvolvimento de práticas de ensino" no programa de formação de professores de Matemática para o ensino básico na Colômbia (LEBEM -UD), construído para a análise de informações sobre o modelo teórico e metodológico declara disposto nos textos produzidos pelos professores-alunos em suas práticas de ensino, entre 2005-2012. Conceituações alcançados no processo de investigação e que se refere aos objetos de aprendizagem, práticas pedagógicas, práticas de ensino e práticas matemáticas também são relatados. Finalmente contribuir, análises, reflexões e significados didáticos feitos por professores dos alunos de matemática.

Palavras-chave: educação matemática, formação de professores de matemática, prática docente, objetos de aprendizagem, conhecimento pedagógico e didático.

Introducción

La sistematización y conceptualización teórico-metodológica de la experiencia educativa de formación de profesores de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital (LEBEM-UD) es el contexto, justificación y objetivo general de la investigación "Desarrollo de las prácticas docentes en LEBEM (2005-2012)", gestionada en este programa. Este artículo reporta los aportes de la fase investigativa encargada de estudiar los textos producidos por los estudiantes para profesor de matemáticas (EPM). La propuesta metodológica se basa en una articulación de las técnicas de la Teoría Fundamentada en los Datos (TFD) y el Análisis Cualitativo del Contenido (ACC).

Antecedentes, justificaciones y motivaciones

La educación matemática y la formación de profesores de matemáticas

Ernest (2006) plantea que la ampliación de los objetos de estudio en el campo de la educación matemática ha permitido desarrollar epistemológicamente el subcampo de la formación de profesores de matemáticas. Según Font (2009), en la educación matemática se abordan todos aquellos aspectos y factores que intervienen e interactúan y hacen posible que las matemáticas se enseñen y se aprendan, según este autor, uno de esos aspectos es el de la formación de profesores de matemáticas. Para Ponte, (2008), al estudiar este subcampo es evidente la necesidad de estudiar los objetos en los procesos formación de profesores.

Formación inicial de profesores y las prácticas docentes

Ponte y Chapman (2009) plantean algunos focos de investigación desarrollados a partir de la reflexión sobre los procesos formación de profesores de matemáticas, entre estos aspectos se destacan: el conocimiento del profesor para el desempeño de su profesión (Shulman, 1986); el análisis del desarrollo profesional del profesor (Sowder, 2007); las condiciones para ese desarrollo (Ponte y Chapman, 2007); las concepciones sobre la profesión y sobre las prácticas docentes en la formación inicial (Llinares y Krainer, 2007); y el análisis de los procesos de estructuración de contenidos de la formación de profesores (English, 2008).

Estudiar el conocimiento matemático, pedagógico y didáctico

Según Lurduy (2013), en los estudios reportados en las principales publicaciones especializadas y eventos internacionales, el propósito de las investigaciones sobre la práctica en la formación inicial del profesor de matemáticas está asociado a conceptualizar y desarrollar como: la construcción del conocimiento matemático, pedagógico y didáctico; la comprensión lo pedagógico, lo didáctico y lo matemático escolar; la comprensión de las prácticas didáctico-matemáticas y el conocimiento profesional desarrollado en ellas. Esto ha sido resaltado para el caso colombiano en el Informe MEN-compartir (2014) en el caso de las políticas educativas nacionales. Así el desarrollo del conocimiento profesional del profesor *debe construirse*, a partir de la investigación sobre "conocimiento y reflexión sobre la práctica". Este conocimiento es desarrollado en todo el proceso formativo y está ligado a acciones investigativas, tanto de la misma formación, como de su acción como docente (Vélez, 2012).

Problema y objetos de investigación

Situación problema, objeto de estudio

A nivel nacional e internacional y en el contexto investigativo de la Universidad Distrital; de la FCE y de LEBEM, se presentan las siguientes situaciones: 1) existen pocos estudios teóricos y metodológicos de la sistematización del proceso de gestión de los programas de formación de profesores; 2) son pocas las investigaciones sobre los desarrollos de la formación de profesores de matemáticas. Lo anterior evidencia que la implementación de propuestas de formación de profesores se sigue orientando por políticas y desarrollos conceptuales ajenos y poco operativos para nuestro medio; genera una baja evaluación e incomprensiones del sentido de la formación didáctica de los profesores de matemáticas.

En la primera parte de la investigación, se procede a indagar la producción textual de los EPM en los trabajos finales de los espacios de formación correspondientes a las prácticas intermedias (I, II, III, IV y V), entre 2005 y 2012. El conocimiento de las prácticas didáctico-matemáticas se hace desde el estudio de los elementos que compondrían el conocimiento de contenido pedagógico y didáctico.

El proceso metodológico

Para esta investigación se propuso una metodología cualitativa crítico-interpretativa de la realidad social que abordamos, desde el enfoque histórico-hermenéutico del tipo "investigación documental" en una intencionalidad descriptivo-exploratoria. En la primera fase de la investigación, se utiliza la adaptación e interpretación de la articulación de TFD-ACC, que Lurduy (2013) hace de algunas técnicas que permiten indagar de manera profunda el contenido de los textos escritos, para el contexto de LEBEM (TFD-Strauss y Corbin, 2012; ACC- Piñuel, 2002; Andreu, 2006).

Proceso de identificación, recolección y reducción primaria de los textos (unidades de muestreo)

En los informes finales de semestre —unidades didácticas— se indagó sobre el origen y existencia física de unidades didácticas correspondientes a las prácticas intermedias del eje de formación de práctica docente. En este lapso de tiempo se han desarrollado 15 semestres académicos, 15 prácticas de cada uno de los cinco énfasis —diseño, planeación y recursos didácticos, gestión, evaluación y gestión del currículo para la educación básica y media—.

Los criterios utilizados para el tratamiento de la información son: identificación y descripción de la información —identificación y descripción de los planos de expresiones del contenido en el texto—; reducción, escalonamiento y ordenamiento conceptual de la información textual —ordenación conceptual de rangos cualitativos de diferenciación—; caracterización y descripción densas de la información en unidades específicas de registro; análisis de la información e identificación de rasgos de expresión de significado didáctico— (Lurduy, 2013). Igualmente, en este trabajo se utiliza de forma permanente *la dimensionalización cualitativa* de la información, para los análisis de cada tipo de unidades de análisis. Reducir, seleccionar, segmentar, organizar y analizar la información para identificarla, describir y sistematizarla. Para todos los casos de las unidades de análisis se procede de manera similar:

- Seleccionar y segmentar la información en subconjuntos de textos para las unidades didácticas individuales (unidades de muestreo, contexto y registro).
- Determinación de objetos, indicadores y descriptores específicamente observables.
- Escalonamiento, ordenación y gradación de la información respectivamente, ello se hace en momentos investigativos diferentes pero complementarios.

Práctica / Periodo	Práctica interm. I Diseño,	Práctica interm. II Recursos didácticos	Práctica interm. III Gestión en el aula	Práctica Interm. IV Evaluación	Práctica Interm. V Gestión curricular	Unidad de análisis: contexto
2005	10	13	10	15	18	**66**
2006	15	12	9	10	12	**59**
2007	10	15	12	14	11	**62**
2008	10	13	13	14	15	**65**
2009	9	10	10	13	15	**57**
2010	10	10	15	12	15	**62**
2011	11	15	12	10	11	**59**
2012(I)	5	6	9	7	8	**35**
Total	**91**	**94**	**90**	**95**	**105**	**465**

Tabla 1. Selección y organización de la información, unidades de muestreo

La tabla 1 resume el proceso llevado a cabo en la recolección, delimitación de información y la configuración de los datos conformada por las 465 unidades didácticas de EPM realizados entre 2005 y 2012 (I). Con el total de unidades didácticas recolectadas mediante un procedimiento de identificación de la información, en una *lectura extensiva*, se procedió a la elaboración de *ficha de registro y organización* de la información una parrilla de los datos mínimos básicos de información. Este configura un primer filtro que identifica los contenidos mínimos y comunes de los textos tratados en la investigación.

Proceso de selección, reducción secundaria, organización análisis contextual (unidades de contexto)

El análisis contextualizado del contenido, construcción de redes categoriales, aplicación de memorando de identificación y registro de la información. El total de información resultante de unidades didácticas, se redujo a 71 unidades de análisis que se llamarán *unidades de contexto*. Por un proceso que se denominó *lectura intensiva* de cada unidad de contexto se evalúa cualitativamente el contenido de la unidad didáctica.

En las unidades de contexto y de acuerdo a los contenidos comunes del énfasis y la organización común del contenido de las unidades didácticas para las de prácticas intermedias se evalúan los elementos constitutivos de las unidades didácticas, a este proceso se le denomina la organización focalizada de la información, lo que posibilitó una consecuente segunda reducción de la información. Estas unidades de cada práctica en cada énfasis se organizan de mayor a menor de acuerdo con las valoraciones cualitativas y asignando una calificación a cada unidad didáctica de cada énfasis, ello produce otra reducción de la información con un segundo filtro epistemológico asociado al contenido contextual de cada práctica.

PERIODO 2005-I	AUTORA: XXXX					DOCENTE ASESOR:	
	Título PENSAMIENTO GEOMÉTRICO MÉTRICO A PARTIR DE FIGURAS						
COLEGIO: C.I.T.	CURSO: 4º	No. DE ESTUDIANTES :		TEMA: PENSAMIENTO GEOMÉTRICO Y MÉTRICO A PARTIR DE FIGURAS			
		SÍ X	NO				
TABLA DE CONTENIDO		INTRODUCCIÓN		JUSTIFICACIÓN		OBJETIVOS	
SÍ	NO X	SÍ X	NO	SÍ X	NO	SÍ X	NO
DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA		IDEOGRAMA/MAPA CONCEPTUAL		MARCO TEÓRICO		SECUENCIA DE ACTIVIDADES/MALLA CURRICULAR	
SÍ X	NO	SÍ X	NO	SÍ X	NO	SÍ X	NO
No. DE SESIONES: 11	GUÍAS			No. PROTOCOLOS 11		MODELO	
	DOCENTE		ESTUDIANTES			DECA	TSD X
	SÍ X No.	NO No.	SÍ X No.	NO No.			
CONCLUSIONES		REFLEXIÓN		BIBLIOGRAFIA		ANEXOS	
SÍ X	NO	SÍ X	NO	SÍ X	NO	SÍ	NO X

Tabla 2. Ficha de identificación y registro del contenido de las unidades didácticas

Para el proceso de evaluación del contenido de las unidades didácticas, se identificaron 71 textos que cumplían con contenidos comunes de acuerdo a la construcción y análisis de las fichas de identificación y registro del contenido de las unidades didácticas. Este proceso de organización, selección y de la información se ejemplifica en la tabla 2, ella muestra cómo se identificó y organizó el contenido básico de las unidades didácticas.

Proceso sistematización y análisis específico de la información (unidades específicas de registro)

Análisis específico de los memorandos de registro, descripción y caracterización de la información, lectura interpretativa, determinación de la dinámica pragmática y comunicativa contenido específico de los textos. En este momento del proceso investigativo se hace una relectura comprensiva de los textos y se tomó en cuenta el contenido de cada énfasis junto con sus elementos constitutivos declarados en el syllabus de cada práctica intermedia y con los criterios de evaluación propuestos por EPD. La delimitación de esta información produce una nueva reducción de la información configurando las unidades específicas de análisis de cada práctica que llamamos *unidades de registro* el conjunto de cinco textos que evidencian una mejor información y más representativa del total de la información recolectada

A cada una de las unidades didácticas de cada práctica se les hace una *lectura comprensiva y densa* (fichas sinópticas) de acuerdo a los contenidos de cada práctica —con criterios como la coherencia interna, suficiencia, pertinencia y validez—. En cada énfasis se organizan de mayor a menor de acuerdo con las valoraciones cualitativas y asignando una calificación a cada unidad didáctica, ello produce otra reducción de la información con un tercer filtro epistemológico asociado al contenido contextual y específico de cada práctica.

Evaluación TFD-ACC-AST: Nivel simbólico		
3.1 Evaluación Deductiva: Orientativa de lenguajes propiedades y situaciones problemáticas Memoria- afectación percepción de datos ricos- Valoración del análisis didáctico	3.2 Muestreo y referencia teórico metodología. Comparación y triadización de la información. Emergencia de la descripción de los elementos de significado	3.3 Interpretación y valoración del diseño de la investigación, de la gestión del proceso de conclusiones y reflexiones finales.
3.4 Evaluación Inductiva-regulativa de contextos: situaciones y procedimientos didácticos. Control de la información Densidad teórica-metodología	3.5 Exploración – ajuste- propiedades de situaciones didácticas Recursividad–reducción categorial Descripción y registro de las correspondencias semióticas de tipos de significado.	3.6 Significación y valoración de los indicadores del proceso de gestión. Valoración del proceso de análisis de la información, conclusiones y reflexiones finales. Evaluación de los tipos de significado
3.7 Evaluación Abductiva-certificativa: semiosis didáctica. Rutinas-roles—organización Reflexiones y conclusiones acuerdos-consensos. Creatividad-	3.8 Reducción categorial: evaluación sustantiva Argumentación y razonamiento didáctico: evaluación formalizada Alcance de las decisiones Evaluación de certificación	3.9 Evaluación del proceso de gestión didáctica y de la gestión del proceso de recolección y análisis de la información de conclusiones y reflexiones finales

Tabla 3. Elementos de significado del objeto-proceso didáctico evaluación

Fuente: Lurduy (2013)

La tala 3 representa los elementos de significado del objeto-proceso didáctico evaluación. Los aspectos mencionados anteriormente evidencian la presencia de un tipo de evaluación certificativa o de comprobación empírica de los hechos didácticos, para el proceso de registro de la información en comentarios de registro según se haga la determinación en las unidades específicas de registro.

Ejemplo de registro de información para la práctica intermedia II**:** los objetos didácticos y contenidos temáticos asociados a ellos se conceptualizan y sistematizan en lo que hemos denominado elementos de significado del CCD, a partir del en análisis de la unidad didáctica más icónica, indicativa y simbólica de la práctica intermedia I, la figura 1 es un ejemplo que representa la codificación y registro de la información, se presentan textos codificados con colores —verde, diseño; amarillo, gestión; rojo, evaluación— correspondientes a elementos de significado de los objetos didácticos.

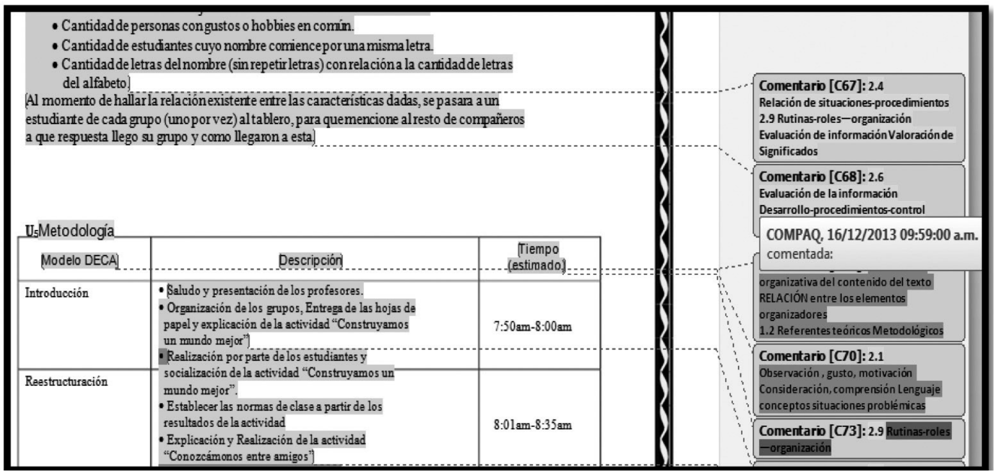


Figura 1. Codificación y registro de la información, memorando de registro de la información

La tabla 4 muestra un ejemplo de los instrumentos de análisis cuantitativo utilizado para sistematizar y organizar la información registrada sobre del número y la frecuencia de los registros de los códigos y comentarios correspondientes al diseño, registrados en los cuadernos y memorandos de comentarios, del texto estudiado y representado en este instrumento es para la práctica intermedia II.

PRÁCTICA 2					
Criterio	**Cantidad**	**Criterio**	**Cantidad**	**Cantidad t**	**Cant. T en proporción**
1,1	5	1,1	9	14	14
1,2	33	1,2	26	59	59
1,3	9	1,3	8	17	17
1,4	4	1,4	3	7	7
1,5	8	1,5	4	12	12
1,6	9	1,6	7	16	16
1,7	6	1,7	5	11	11
1,8	8	1,8	7	15	15
1,9	4	1,9	4	8	8

Tabla 4. Frecuencias de comentarios en la unidad didáctica de la práctica II

En los siguientes gráficos 1, 2, y 3 —comentarios vs frecuencias— se muestra un ejemplo de una representación de la expresión de los elementos de significado —colores, códigos y comentarios en cada tablas) en los objetos didácticos encontrados y registrados en las unidades didácticas, —ver la figura—. Así como representan y muestran los órdenes de aparición de los elementos de significado de objetos didácticos, y su comparación para ser utilizadas como soporte cuantitativo en el análisis cualitativo de la información.

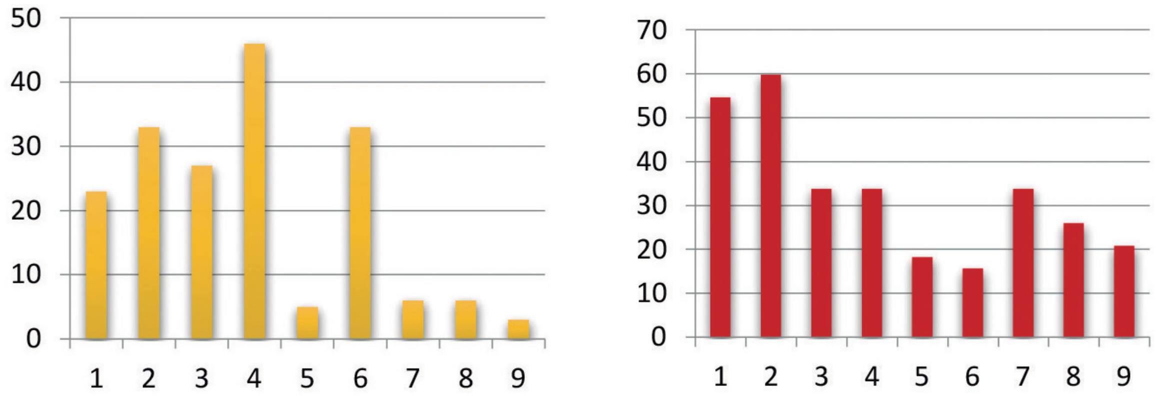


Figura 2. Comparación comentario vs frecuencia, diseño, práctica II

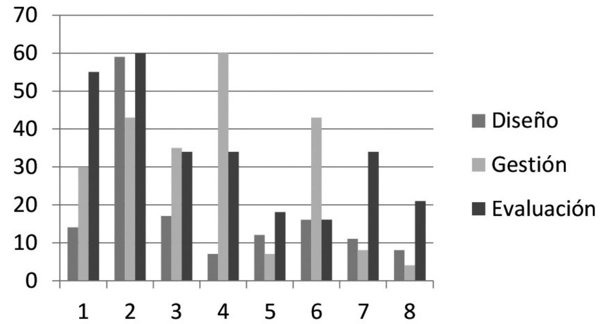


Figura 3. Comparación comentario vs frecuencia, gestión y evaluación, práctica II

Fuente: elaboración propia

En la tabla 4 el código del comentario 1.1, tiene 14 apariciones y el 1.2 59, entre otros; así se representan en las figuras 2, 3 y 4 ejemplos de representación de las frecuencias de los comentarios y códigos de los objetos didácticos utilizados en el análisis de las unidades didácticas, en el grafico 4 se ejemplifica la comparación entre estas representaciones.

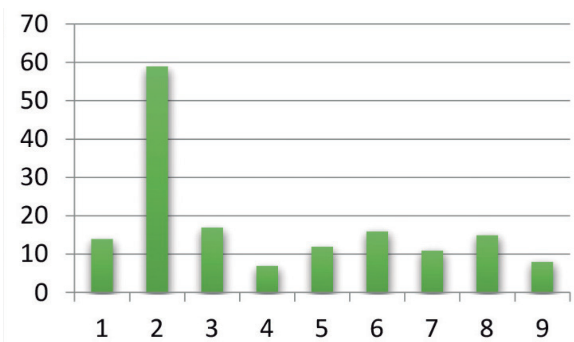


Figura 4. Comparación diseño, gestión y evaluación, práctica II

La figura 4 representa la comparación hecha para los conteos y representadas en las figuras 2, 3 y 4, muestra los órdenes de aparición de los elementos de significado y posibilita una comparación en la vía de los análisis de las unidades didácticas. Estos análisis comparativos se realizaron para las cinco unidades didácticas de cada una de las prácticas intermedias (I, II, III, IV y V). Las evidencias y pormenores de esta parte de la investigación se contrastaron con los resultados de las otras dos fases de la investigación —sistematizar el modelo de prácticas docentes y la conceptualización los constructos de CCP-CCD en el desarrollo de LEBEM en el periodo 2005-2012—.

Aportes de los desarrollo metodológicos

Perspectiva metodológica

Una propiedad del enfoque metodológico asumido es la pretensión de consistencia, con el carácter de reflexividad y auto-reflexividad, entre los investigadores y la investigación misma; entre el proceso de formación en LEBEM y las inferencias pedagógicas y didácticas resultado del proceso de su investigación. Por esta vía, son reales las posibilidades de descripción, comprensión y caracterización de los fenómenos sociales estudiados, realizadas por los gestores de las propuestas de desarrollo social y educativo, Vasilachis, (2006).

Teoría fundamentada en los datos

En un primer momento de aplicación de las estrategias de lo que se interpreta como Teoría Fundamentada en los Datos (TFD) (Grounded Theory), se propone la generación y desarrollo de criterios de conceptualización de los procesos de la formación de profesores de matemáticas en la práctica docente. Se aceptan algunos de los enunciados provenientes de una teoría, Strauss y Corbin, (2002) al partir del análisis de los textos construidos y proporcionados por los FPM y los EPM.

Análisis cualitativo de contenido

Según Piñuel (2002), se parte de la suposición de que el contenido, el significado y el sentido en esas expresiones comunicativas textualizadas —mensajes, textos o discursos— es posible de ser develado por procedimientos interpretativos basados en técnicas cualitativas —lógicas basadas en la combinación de categorías—.

Estos métodos de investigación cualitativa de tipo inferencial posibilitó ir fundamentando las conclusiones generales de los textos sobre la descripción del modelo de formación LEBEM y sobre el desarrollo del eje de práctica docente. Posibilita la descripción conceptualización y organización sistemática de la información en el proceso mismo de recolección y tratamiento de la información.

Se asume con Andreu, (2007) que es posible combinar las intenciones de TFD con las de ACC, para reducir información e ir generando un análisis inicial de abundantes datos sin el manejo de programas informáticos.

Aportes de los referentes teóricos

En general, se interpreta que el conocimiento didáctico y pedagógico (CCP-CCD), expresado en los textos —tanto de FPM como de EPM—, ha sido el resultado de las elaboraciones e investigaciones de los formadores de profesores en la práctica docente en LEBEM, desde allí el saber pedagógico y didáctico depende de esa episteme en un contexto innovador.

Innovaciones y experiencias educativas

Según Aguilar (2005), una innovación educativa consiste en cambios deliberados, sistemáticos, duraderos, en alguno de los componentes de la relación social pedagógica y de su contexto de realización, que estructuran de una manera diferente lo que se considera tradicional o convencional en un espacio formativo específico.

Contexto y textos objeto de esta investigación

Se entiende por contexto el marco de referencia asociado a realidades humanas, sociales y culturales, donde se desarrollan tanto las subjetividades e intersubjetividades, como las acciones e interacciones, así como sus comunicaciones e implicaciones —en este caso, LEBEM-EPD, FPM-EPM, prácticas intermedias docentes—. El contexto es el marco de referencia que cada autor/lector quiere, puede y debe conocer de antemano o inferir de un *texto,* —la escuela, la clase, la actividad matemático-didáctica, los documentos y programas, los informes—, para construir, captar, develar, interpretar, leer el contenido y el significado de lo que se dice, se hace, se regula en ese texto.

Sistema didáctico y el modelo de tetraedro didáctico.

Desde la interpretación de los contextos realizativos de los procesos de formación se hace necesario determinar los contextos focales y específicos, para esos procesos formativos se utiliza la interpretación *de sistema didáctico* (Chevallard, 1989). Así, se llama al contexto específico de realización de las acciones formativas institucionalizadas que permiten hacer lecturas analíticas de los objetos en ellas intervinientes —prácticas didácticas, prácticas docentes, prácticas matemáticas, textos escritos por los EPM, textos escritos por los FPM de LEBEM—, a este modelo de análisis se le denomina *tetraedro didáctico* Lurduy (2005, 2012).

Procesos de estudios formativos, pedagógicos y didácticos

En una perspectiva de interpretación del proceso formativo como la pretendida en este trabajo, se hace necesario determinar los procesos de estudio institucionales —focalizar contextos y determinar textos—, que para este caso están referidos las temáticas pedagógicas, didáctica y de las matemáticas escolares en la formación de profesores (Lurduy, 2013). Se acepta con este autor que la expresión *procesos de estudio dirigido didáctico-matemática* refiere a los procesos de formativos de enseñanza y aprendizaje de tipo pedagógico organizados institucionalmente, en los cuales intervienen: unos determinados sistemas de prácticas didácticas, matemáticas y sociales, unos sujetos cuyo compromiso es la apropiación personal de dichas prácticas, y unos recursos instruccionales y un entorno o contexto específico o local.

Prácticas docentes y didácticas

Se entiende por práctica docente al proceso de estudio formativo dirigido y organizado en el marco de un programa de formación de profesores, en los cuales intervienen: sistemas de problemas pedagógicos, didácticos y matemáticos escolares que nutren las prácticas docentes; una reflexión sobre ellas y el compromiso por la apropiación y transformación de dichas prácticas; la resolución de problemas didáctico-matemáticos vividos con los objetos didácticos-matemáticos y los actores intervinientes (Guerrero, Sánchez, Lurduy, 2011).

Una práctica didáctica es toda expresión, actuación y regulación que efectúa un profesor para resolver problemas didácticos, al abordar objetos didácticos —diseñar, gestionar y evaluar una secuencia de actividades—; comunicar a otros su "solución" al problema didáctico planteado, validarla o generalizarla a otras prácticas, problemas, objetos didácticos, (Lurduy, 2013). Esta conceptualización supone una relación dialogal, complementaria y recursiva entre las nociones de práctica, problema y objeto; su uso es pragmático, funcional y transdisciplinar en una situación problémica, en el entendido que la situación planteada es problema y necesita alguna solución (Lurduy, 2012).

La resolución de problemas del profesor.

Se afirma que la resolución de problemas del profesor es el marco de actuación del profesor (EPM) y que las actividades didáctico-matemáticas son las generadoras del sentido a la práctica docente y del proceso de instrucción en que él interviene como docente-practicante, en tanto constituye el contexto en el que se lee e interpreta esa práctica. Lo anterior es pertinente para esta investigación pues el modelo de actuación en la práctica docente, se textualiza en "unidades didácticas".

Objetos-procesos didácticos

En esta construcción se posibilitan explicaciones del estudio significados de los objetos didácticos y matemáticos escolares. Se hace referencia a los *objetos-procesos didácticos,* como aquellos entes relativos al proceso primario de enseñanza de los aspectos didácticos generales de la profesión ser profesor —diseño, gestión y evaluación de actividades de clase—, sobre los cuales se hace necesario sistematizar y organizar el contenido de esos aspectos en los programas de formación de profesores (Lurduy, 2012, 2013).

Modelos y formatos de actuación en la práctica docente

Inicialmente, para la aplicación de la enseñanza de los objetos didácticos en los desarrollos de la práctica docente y para hacer operativo su uso en el proceso formativo en LEBEM, se tuvo en cuenta la interpretación y adaptación que han hecho, los profesores del grupo Crisálida de manera conveniente y pragmática para el caso de medio Colombiano, de algunos elementos de las perspectivas didácticas DECA (1998) y Brousseau (1986) como elemento para el diseño, gestión y evaluación de la secuencia de actividades.

El modelo DECA-Brousseau, de actuación en la práctica didáctica

Existen variados y múltiples modelos, herramientas e instrumentos para desarrollar diseños, gestión y evaluación en el proceso de elaboración de secuencias didácticas. En LEBEM-UD, después de un periodo de indagación, pilotaje, validación e implementación de dichas perspectivas didácticas y su propuesta de implementación de secuencias de actividades se desarrolló una propuesta, que se nominó DECA-Brousseau (Guerrero y Sánchez, 2001; Lurduy et al., 2005).

Secuencias de actividades y unidades didácticas en LEBEM

Desde la perspectiva de resolución de problemas didácticos del profesor, el primer acercamiento que tienen los EPM a la escuela es una propuesta de una secuencia de actividades de clase en diferentes tipos de actividades. Dicha propuesta cimienta sus bases en un modelo socioconstructivista del conocimiento; en la resolución de problemas matemáticos escolares, pues es en las prácticas didácticas donde emergen los significados didáctico-matemáticos, de los que el EPM da cuenta en un escrito que en el EPD de LEBEM -UD se llama "unidad didáctica".

Se llama *unidad didáctica* al informe escrito en donde se presenta el diseño, gestión y evaluación de la secuencia de actividades llevada a cabo en los espacios de la práctica docente. Es el resultado de la intervención didáctica que los EPM registrarán en el diseño de instrumentos y evidencias de la gestión de la clase y del trabajo de los alumnos, que posteriormente se analizan y evalúan. En las unidades didácticas se hace necesario evidenciar los diferentes elementos constitutivos del contenido de cada práctica, lo que exige que se haga evidente el conocimiento sobre la enseñanza y los elementos de conocimiento matemático escolar.

Unidades de análisis

Los textos de los FPM y de los EPM son tratados en procesos de aplicación metodológica diferenciada de acuerdo el cumplimiento de los dos tipos de objetivos generales de la investigación. Estos textos se toman como *unidades de análisis* y son abordados, en la interpretación de una investigación documental y una codificación del contenido en los tres órdenes de codificación —abierta, axial y selectiva—. Se denominan *unidades de muestreo* al conjunto total de textos disponibles, a partir de una lectura extensiva del contenido de estos textos es posible la identificación y la descripción de información primaria, el hallazgo de rasgos comunes y diferenciadores del *universo simbólico del discurso* —codificación abierta—, descripción de la estructura organizativa y común de los textos, y la descripción de la superficie textual de los documentos de limita e identifica *la gramática* de los textos, determinación de *planos de expresión* del contenido.

Ello produce una reducción de la información, a partir de algunos criterios de ordenación y escalonamiento de la información de tipo necesario para la diferenciación de niveles de análisis. Se llaman unidades de contexto al subconjunto de unidades de análisis resultantes de la primera reducción de la información, ellas son descritas como referidas a la determinación de elementos focalizados y característicos del contenido de los textos que están relacionados al contexto de la investigación como son los elementos diferenciadores de tipo temático para el contenido de las prácticas —rangos de expresión didáctica—, se posibilita identificar regularidades y diferenciaciones que denominamos como rangos de regularidad contextual y una segmentación de los textos, —codificación axial indicativa—.

En estas unidades de contexto se reitera un proceso de reducción, selección y organización de la información y se selecciona el subconjunto de textos específicos para el análisis de contenido específico, estos segmentos diferenciados de información se han denominado *unidades específicas de registro*, ellos posibilitan la caracterización y descripción densas de la información en los textos en subunidades de análisis —codificación selectiva—. Mediante una segmentación específica de registros de la información caracterización de los objetos didácticos, se hace la caracterización de los contenidos y de los descriptores de los objetos didácticos, *rasgos de expresión* discurso didáctico; dimensionalización de las variables cualitativas; descripción densa de los significados didácticos[3] (Lurduy, 2013).

Resultados del proceso investigativo

En este desarrollo teórico-metodológico de TFD-ACC, las estrategias comunes a las técnicas utilizadas para la recolección y tratamiento de la información son: identificación, determinación de las unidades de análisis e identificar filtros epistemológicos; elaboración, descripción de criterios para la selección, reducción y ordenación de la información; consistencia, flexibilidad y continuidad metodológica para tratar la especificidad y particularidad de los textos de los FPM y EPM (Vasilachis, 2006).

Identificación de elementos significativos en CCP-CCD

A partir las sistematizaciones en el EPD se propone el estudio del conocimiento profesional en los contextos de aprender a enseñar, como una manera de organizar las tareas didácticas y sus formatos. Según la interpretación realizada, estos preceptos y sus formatos se explicitan en las unidades didácticas en comportamientos en acto textualizados en la formación inicial que tiene diversos orígenes ideológicos, culturales y sociales y reivindicamos en ella el papel mediador, complejizado y crítico de los formatos, pues ellos dan forma, actualizan y son actualizados en la conversación con intenciones de construcción de sujeto (Gadamer, 1984, citado por Lurduy, 2013).

a. CCP, análisis del diseño, gestión y evaluación de las unidades didácticas: la formación del profesorado es insuficiente en el nivel de pregrado y no puede preparar a los profesores para toda su larga carrera. Esto sugiere que el formato en la formación del profesorado se centra en reflexionar

3 Este análisis pormenorizado de tablas, gráficos y figuras, desborda las limitaciones de tiempo y espacio de este artículo. Lo realizado mediante el estudio e interpretación de los gráficos semejantes a los presentados en la sección tres posibilitó el análisis de los textos aquí presentado.

sobre qué y cómo aprender de la experiencia y cómo construir conocimiento profesional de tipo pedagógico y didáctico (Lurduy, 2013), se aprende a enseñar:

1. Aprender a enseñar es un proceso que se construye a través de la investigación del profesor en formación.

2. Aprender a enseñar requiere trabajar con otros compañeros.

3. Aprender a enseñar requiere relaciones significativas entre la escuela la universidad.

4. El proceso de aprender a enseñar se mejora cuando los enfoques de enseñanza y aprendizaje son modelados por los formadores de profesores desde su propia práctica

5. El formato de la clase de práctica docente permite que los estudiantes tengan una etapa de preparación y fundamentación teórica antes de implementar una secuencia de actividades.

b. CCP, reflexión pedagógica en las unidades didácticas: el diseño de unidades didácticas implica la toma de decisiones, puesto que ésta sintetiza y concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, metodología y evaluación (CCP, Shulman 1986), se puede inferir que el formato de reflexión en de las unidades didácticas se ha de basar en seis elementos:

1. La información disponible sobre los objetivos y contenidos del currículo, de los estándares, de los libros de texto y del documento del área de matemáticas y del PEI.

2. Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos.

3. El conjunto organizado de prácticas institucionales: operativas, discursivas, y normativas.

4. Materiales y recursos disponibles para el estudio del tema.

5. El conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema.

6. Los criterios metodológicos y de evaluación incluidos en las orientaciones curriculares.

c. CCP, elementos de significado comunes en las unidades didácticas: la mediación de los formatos es una acción intencional de hacer reflexionar a los EPM sobre su actuación en el aula, en el proceso de aprender a enseñar matemáticas escolares; la clase se orienta a partir de la metodología de resolución de problemas del profesor. Este proceso tiene los siguientes pasos:

1. Formato de preparación de las actividades de enseñanza por el practicante. Revisión de las actividades por parte del tutor de práctica docente.

2. La implementación del formato de la secuencia de actividades se realiza en las instituciones educativas donde se desarrolla la práctica.

3. El formato de protocolo de clase es la principal herramienta para el análisis didáctico que realiza el practicante.

4. El formato de la clase de práctica docente para generar razonamiento pedagógico y conocimiento práctico en el estudiante para profesor de matemáticas.

d. CCD y formato de las prácticas didácticas: las consideraciones anteriores se refieren a la fase de "pensar y reflexionar" la práctica didáctica:

1. Para el diseño de las actividades y secuencias, se contemplan una primera fase de planificación, que llamamos los an*á*lisis preliminares y una segunda fase propiamente de diseño que refiere a la concepci*ón* y an*á*lisis de las situaciones did*á*cticas.

2. En la gestión de las actividades se recalca que el aprendizaje es siempre el producto de la práctica, querer hacer; de la resolución de problemas esto es de poder hacer lo que requiere hacer; lo que construye es un saber hacer de los estudiantes.

3. Sobre la evaluación de la práctica del estudiante: solución de problemas didácticos y matemáticos, saber resolverlos; la contextualización de contenidos, saber actuar en las situaciones problémicas; construir significación sobre los objetos, saber implicarse.

e. CCD, formatos y elementos constitutivos de las unidades didácticas: constituyen el contexto realizativo de las prácticas, el EPD determina que dentro de la planeación del trabajo de aula es importante que la propuesta de secuencias de actividades que están organizadas en general con los siguientes aspectos. En la información disponible se evidencia que hay cuatro elementos del "formato" de organización de las unidades didácticas que son:

1. Los conocimientos matemáticos escolares.

2. Los elementos ecológicos de tipo didáctico institucional de lo educativo y escolar, de lo colectivo del aula y del entorno de la clase.

3. La guía del profesor y el conjunto de actividades que deberá resolver el estudiante.

4. Los protocolos de la clase a partir de la sistematización de la información del desempeño del estudiante y de la reflexión del EPM, de la gestión.

Descripción de elementos significativos de CCP-CCD

Para la justificación de la secuencia general de las actividades los EPM —nociones de *formato* en la metodología de resolución de problemas del profesor—, toman en cuenta en el diseño curricular los propósitos de la secuencia, consistentes con el modelo didáctico y los referentes teórico-metodológicos.

a. La noción de *formato* es relevante en este contexto, ya que delimita y esquematiza una manera de presentación y re-presentación de la práctica didáctica, por ejemplo qué debe contener una guía del profesor; una práctica discursiva que connota el querer ser-hacer-saber; qué aprendizajes son posibles y qué metodología de enseñanza es pertinente para lograrlos una práctica operativa que connota el poder ser-actuar-saber y qué implicaciones en la práctica de aula -una práctica normativa que connota el deber ser-actuar y-saber (Lurduy, 2013).

Respecto a la manera como los EPM diseña, gestiona y evalúa un formato de una secuencia general, cobra importancia la incorporación de conceptos teóricos como variables de la tarea, hipótesis de aprendizaje, niveles de desempeño de los alumnos, entre otros; que relacionados con los contenidos matemáticos que se traducen en objetos de enseñanza y de aprendizaje adquieren el diseño, la densidad y complejidad de la actividad matemática mediante un formato.

b. Esta manera de entender el diseño, la gestión y la evaluación por los EPM, impone una forma en la lógica organizativa del texto, el rigor con que se asumen los conceptos teóricos para el diseño de la gestión, la coherencia y consistencia entre cómo se presentan los en una situación didáctica, y las rutinas y guiones de acción del profesor, la conexión entre referentes teóricos y metodológicos, la intelección de los instrumentos de recolección y análisis de la información, la flexibilidad para gestionar el diseño a la hora de considerar modificaciones en la actividad.

En la fundamentación se busca coherencia-consistencia entre las acciones del EPM y la reflexión sobre la acción entre su conocimiento didáctico y el conocimiento que le da la práctica resultado de su experiencia en el aula y cómo hacer inteligible el tipo de situación didáctica y la pertinencia metodológica de tomar una decisión u otra. Respecto de los referentes teóricos que se vinculan con la evaluación, una clave para el análisis, reflexión y valoración de la información son los indicadores de gestión, cuya significación se asocia a acciones didácticas controladas y estrategias pensadas por los EPM.

c. La aplicabilidad o transferencia que se pueda hacer de un concepto teórico introducido en el diseño de una situación didáctica, debe implicar un cierto pragmatismo en la toma de decisiones en la gestión de la clase —como el hábito de recurrir a la memoria didáctica durante el proceso de enseñanza— que posibilite nuevos roles e interacciones o al menos la emergencia de ellos, frente a la incertidumbre que genera físicamente, no poder tener en cuenta todas las variables didácticas en la resolución de un problema didáctico, en un proceso de estudio en una práctica didáctica.

En esta perspectiva, las conclusiones que sacan los EPM, de lo que es o no es posible enseñar como contenidos curriculares escolares que hacen parte de una actividad resolución de problemas matemáticos, derivan del control en la gestión de dichas actividades: el uso de instrumentos mediadores, de la calidad de la intervención, de los instrumentos de registro, de los procesos de análisis de datos, de cómo se incorporó en la reflexión los referentes teóricos para la elección de las situaciones problemas, de cómo se tomó en cuenta el contexto social de los aprendices, de los procesos de negociación del significado, de las distintas maneras de entender una proposición matemática, de las interacciones en el aula, etc.

Caracterización de los elementos de significado de CCD

La identificación, descripción y caracterización de la configuración del CCD se realiza de manera secuencial, ordenada y analítica en la lectura de tipo extensiva, intensiva e interpretativa de los texto, esta configuración tiene unos elementos de significado de: 1) planos de identificación del diseño, de la gestión, y de la evaluación que se asocia al análisis didáctico, realizado por el EPM de LEBEM; 2) los niveles descripción del diseño, de la gestión, de la evaluación que se asocia a rangos de la reflexión didáctica en la que es formado un EPM por el EPD; y 3) los rasgos de expresión de los rasgos de caracterización del diseño, de la gestión, y evaluación que se asocia a la significación de CCD. Ellos expresan en los textos en la que es formado un EPM por el EPD en las prácticas intermedias, la caracterización fenoménica de la identidad como profesor de la siguiente manera:

a. Identificación de un espacio icónico de configuración del discurso en los textos expresión de la información en los textos (planos de CCD).

Inicialmente se hace referencia a la utilización de unos planos de configuración, organización y delimitación del contenido de los textos. Se trata de poder caracterizar las condiciones existentes de diferenciación y reducción de la información en los textos, planos de escalonamiento, organización, secuenciación y construcción de significado sobre objetos didácticos.

El plano gramático-analítico: propuesta de organización y presentación del contenido de los textos básicamente en lo relacionado con el diseño de la secuencia y de la unidad didáctica. Corresponden a la "gramática" organizativa tipo de la unidad didáctica, por ejemplo, la organización del diseño de la que están informando en los respectivos textos; la organización de los análisis de la información; los cuadros y figuras de las estructuras de los diseños, las formas de diseño de la organización de los análisis, reflexiones y conclusiones.

El *plano semántico-descriptivo*: posibilita la interpretación del significado de los textos en situaciones, operaciones, condiciones específicas de realización de la práctica didáctica en torno a una temática de la matemática escolar, en lo relacionado con la gestión en los protocolos de clase en la unidad didáctica.

El *plano pragmático-interpretativo*: asociado con la búsqueda del sentido de los textos en las acciones, las interacciones didácticas y especificación de las prácticas sobre el diseño, gestión y evaluación de secuencias de actividades.

b. Descripción de un espacio indicativo del orden de regularidad del contenido en relaciones didácticas en los textos (rangos de CCD).

Las referencias a los niveles de relación didáctica profesor-saber —análisis didáctico—, y profesor-entorno —reflexión didáctica—, y profesor-estudiante- —significados didácticos—expresan la existencia de las interacciones didácticas de las relaciones específicas del tetraedro didáctico en el aula de clase. Era necesario identificar un conjunto de rangos localmente homogéneos como criterio de comparación del contenido de los textos. Niveles de "gradación" y secuenciación de significado sobre las reflexiones sobre las interacciones didácticas, —llaman reflexión didáctica en la unidad didáctica—

El nivel de analítico-organizativo: de las relaciones profesor-saber, que es el rango de identificación para el análisis didáctico y está compuesto por las organizaciones de los objetos y los elementos de significado de los objetos del análisis del tema matemático escolar.

El nivel semántico-reflexivo: de las relaciones profesor-entorno que es el rango de descripción para la reflexión didáctica en la acción y es característico de las descripciones de los roles e interacciones en el aula, del material didáctico, en el análisis del tema matemático escolar, en los programas y actividades específicas para la temática.

El nivel validativo-actuativo: en la caracterización de las relaciones profesor-estudiante que es el rango para la significación en la práctica didáctica de la relación profesor-estudiantes. Es evidenciado por los análisis y reflexiones sobre las relaciones entre estudiantes y profesores utilizados por el profesor (EPM) para que pueda caracterizar dichas relaciones.

c. Caracterización de un espacio simbólico del orden de significación de las situaciones didácticas específicas (dinámicas y rasgos de CCD).

Evidencian lo procesual y temporal de las acciones didácticas en el aula en momentos específicos de la interacción didáctica con determinación e intercambio de roles y organizaciones claramente definidos, también momentos de interacción entre los mismos roles y organizaciones de la clase, ello es expresado en los protocolos de una secuencia didáctica o una parte de ellos, rasgos de "gradación y orden" y secuenciación de significado sobre las situaciones didáctica.

Rasgo significativo-interpretativo: en los rasgos y dinámicas de la situación didáctica el análisis lo hace por medio de la identificación de lenguajes y representaciones comunes, la formulación de posibles soluciones y conjeturas de solución para el abordaje de la solución. Caracterizada por la interacción del estudiante con saber, el EPM quiere ser-actuar como profesor en una situación problema de tipo matemático o didáctico-matemático.

Rasgo simbólico-implicativo: los rasgos y dinámicas de la situación didáctica que permitan en la acción o práctica hacer-saber-proceder en la solución del problema o en el abordaje de la solución. Para el EPM las acciones didácticas en tal situación de interacción se convierten en indicadores, señales de las características fenoménicas del poder-ser y actuar como profesor.

Rasgo valorativo-argumentativo: los rasgos y dinámicas de la situación didáctica en la que se necesita consensuar pragmáticamente con relación al conocimiento institucional de referencia. Estas consideraciones, reflexiones y compromisos con la acción didáctica representan simbólicamente la emergencia de las características del deber *ser, actuar y saber ser profesor*.

d. Implicaciones meta-didácticas de las prácticas didácticas.

Estas consideraciones-reflexiones-saberes y compromisos con la acción didáctica representa la necesidad de analizar, reflexionar y construir significado sobre las acciones didácticas, se convierten en símbolos de la emergencia de las características fenoménicas de la práctica didáctica textualizada (CCP) que son el resultado del diseño, abordaje y solución de la situación problema de tipo didáctico. Por lo anterior, los textos se clasificaron y redujeron a unos textos que configuran el análisis del significado del constructo CCD. Se concluye que se trata de los objetos procesos meta-didácticos de análisis, reflexión y semiosis didáctica, (Lurduy, 2013) como se presenta a continuación.

Análisis didáctico: se trataría de evidenciar en los textos, las acciones físicas y mentales de consideración de los objetos procesos didáctico-matemáticos interactuantes en una práctica didáctica. En esta parte, referido a elementos de significado didáctico, tipos de significado, configuraciones de tipo didáctico —procesos de identificación-sensibilidad-motivación con la resolución de problemas didácticos y pedagógicos característicos de la profesión ser profesor de matemáticas, propuesta en LEBEM— profesor constructivo-investigador.

Reflexión didáctica: se trataría de evidenciar en los textos la acción de observación, reacción y reflexión-interpretación en la acción didáctica respectiva o meta-acción que recae sobre otras acciones, que se expresa en los protocolos sobre las acciones didácticas y que se identifican en tres tipos: reflexión sensorio-discursiva, reflexión operativa en la acción, y reflexión simbólico-normativa. Las acciones realizadas en los procesos de instrucción o los rasgos de análisis didáctico realizado, en un "meta-nivel" del análisis didáctico.

Semiosis didáctica: se trataría de estudiar las evidencias que se dan en el proceso de estudio matemático-didáctico en el seno de los sistemas didácticos y que se identifican como material, inmediata y retórica; estratégica, interpretativa y actuativa; pragmática, implicativa y comprometida. Se trata entonces de evidenciar en los textos, la construcción de significados y de procesos de construcción de significado didáctico, que constituyen el saber didáctico construido en la acción.

Referencias

Aguilar J. (2005). *La LEBEM como innovación educativa en la formación de profesores. Conferencia Invitada*. Encuentro de práctica pedagógicas, Bogotá. UDFJC-IEIE.

Aguilar J. (2013). *La sociología de la escuela. Curso de innovaciones educativas y profundización de la maestría en educación Universidad Distrital. MEE-UD, Diapositivas guiadas.* Bogotá: MEE-FCE.

Andreu, J. (2007). *Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada.* Sevilla: Fundación Centro de Estudios Andaluces.

Blanco, L. (2001). *Conocimiento y Acción en la enseñanza de profesores de E.G.B. y estudiantes para profesores.* Badajoz: Manuales UNEX, Universidad de Extremadura.

Bolívar, A. (2005). *Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas.* Pedagogical content knowledge and subject matter didactics. (s.d.)

Chevallard, Y. (1989). La trasposición didáctica. Buenos Aires: Aique.

English, L. (2008). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (s.d.).

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. Educational Study in Mathematics (s.d.).

FCE-UD, (2013). Aportes al proyecto educativo UD. Una construcción colectiva. Comité institucional de currículo. Bogotá: UDFJC

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión* (26), 9-25.

Godino, J. y Batanero, C. (2010). *Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica.* Conferencia Invitada al VI CIBEM. Puerto Montt, Chile.

Guerrero, F. (2006) La práctica docente a partir del Modelo DECA y TSD. *Enseñanza De Las Ciencias Revista De Investigación Y Experiencias Didácticas, 23*(3), 235-238.

Glaser, B. y Strauss, A. (1967).*The discovery of grounded theory*. Chicago: Aldine

Llinares, S. (2011). La formación de profesores de matemáticas. Sevilla: GID.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners (s. d.).

Lurduy, O. (2005). Rutas de estudio y aprendizaje en el aula. El caso de las matemáticas. Cuadernos de investigación, 5. IEIE-UD. Bogotá: Fondo De Publicaciones Universidad Distrital.

Lurduy, O. (2010). Investigación en la formación de profesores de matemáticas. Agendas y perspectivas. Revista científica, 11. Centro de investigaciones y desarrollo científico. Bogotá: Universidad Distrital.

Lurduy, O. (2012). El sistema didáctico y el tetraedro didáctico. Elementos par aun análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas. En, León, O. L., Libros de los énfasis del doctorado interinstitucional en educación. No 2. Pensamiento epistemología y lenguaje matemático. DIE-UD. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Lurduy, O. (2013). Sistematización y evaluación de la competencias de análisis, reflexión y semiosis didáctica. El caso de los EPM de Matemáticas. DIE-UD. Tesis doctoral inédita.

MEN (2014). *Tras la excelencia docente. Cómo mejorar la calidad de la educación para todos los colombianos*. Fundación Compartir. Recuperado de http://www.fundacioncompartir.org

Ponte, P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. PNA, 2(4) 153-180.

Ponte, P. y Chapman, O. (2008). *Pre-service mathematics teacher`s knowledge and development* (s.d.).

PREAL (2013). Las metas educativas de los países iberoamericanos 2021. En Sinopsis educativa, 13. Recuperado de: www.preal.org/Publicacion.asp

Santos, B. (2007). *Una epistemología del sur*. México: Siglo XXI, Clacso.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, (15), 4-14.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In Frank K Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NCTM.

Sriraman B. y English, L. (2010). Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. In Sriraman, B. y English, L. *Theories of Mathematics Education Seeking New Frontiers.* Recuperado de: http://www.springerlink.com/content/978-3-642-00741-5/contents/

Strauss, L. y Corbin, M. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia

Vasco, C. (2011). *Problemas y Retos del Discurso de las Competencias. Diapositivas guiadas, seminario de pedagogía y didáctica, DIE-UD.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Barcelona: Editorial Gedisa.

Vélez, C. M. (2012). La gestión de la educación en Colombia 2002-2010. PREAL. Documentos 60.

INSTRUCTIVO PARA AUTORES

Recepción de artículos: los artículos presentados para su publicación pueden ser de carácter teórico, técnico o de aplicación; deben ser producto de una investigación, una experiencia práctica de la profesión o revisión de un tema específico, relacionado con las ciencias, la ingeniería, las matemáticas, las tecnologías y la educación científica. Serán sometidos a un proceso de doble arbitraje ciego que evaluará la originalidad del texto, su desarrollo, la calidad de su argumentación y su relevancia. Los autores cuyos artículos sean publicados ceden los derechos a la Revista y al Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y se hacen responsables de las opiniones y afirmaciones que en ellos contengan.

Envío de artículos: los artículos deben ser remitidos por correo electrónico a: adpgallegot@udistrital.edu.co, con copia a: centroi@udistrital.edu.co

Arbitraje: todos los artículos recibidos, que cumplan con los requisitos formales de presentación, serán sometidos a un sistema de doble evaluación ciega de alguno de los integrantes del comité de evaluadores. En casos dudosos será sometido a una tercera evaluación.

Bibliografía: es necesaria y se ubica al final de cada artículo. Va ordenada alfabéticamente por el apellido del autor, y se emplea el sistema APA reciente.

Extensión: los artículos tendrán una extensión máxima de 20 páginas incluyendo la bibliografía a espacio 1,5 y letra Times Roman en formato Word 12.

Títulos: sugerimos que los títulos no excedan las 15 palabras. Se debe incluir su traducción al inglés y al portugués.

Resúmenes: no deben tener más de 150 palabras y debe incluir de 5 a 7 palabras clave, y su correspondiente traducción al inglés y al portugués.

Gráficos y Tablas: las tablas, gráficos, fotografías y dibujos, además de incluirlas en el artículo, deberán ser enviadas en un archivo adjunto.

Enviar la hoja de vida sintetizada (máximo 2 páginas) de los autores, al igual que la carta de cesión de derechos de autor y la de originalidad del artículo; las puede encontrar en la versión digital de la revista http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/issue/current