

# MODELAMIENTO ESPACIO–TEMPORAL DE LA PRECIPITACIÓN TOTAL MENSUAL, PARA EL AÑO 2007, EN LA ZONA ANDINA COLOMBIANA

Space - time modeling of the total monthly precipitation  
for the year 2007 in the Colombian Andean Zone

*Diego Ernesto Cortés Moya, William Alexander Peña Ocampo, Luis Fernando Santa Guzmán*

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá – Colombia

Correspondencia: joesk8\_65@hotmail.com; icg\_william@hotmail.com; fernando.santa@gmail.com

Recibido: 28 de marzo de 2012    Aceptado: 25 de mayo de 2012

## Resumen

Actualmente, entidades públicas y privadas a nivel nacional llevan a cabo predicción de fenómenos medioambientales como la precipitación, con el uso de modelos basados en métodos de interpolación espacial, tales como la distancia inversa ponderada (IDW), polígonos de Thiessen y *kriging*, los cuales tienen en cuenta las características espaciales de la variable estudiada. Cuando se requiere incluir la dimensión temporal, se acude al análisis multitemporal de los escenarios obtenidos mediante los mencionados pronósticos espaciales, sin incluir en conjunto al espacio–tiempo. En este trabajo se aplicaron conceptos de geoestadística espacio–temporal, como una propuesta metodológica a la predicción de este tipo de fenómenos. Se emplearon modelos de covarianza espacio–temporal separable, para realizar predicciones en ubicaciones espaciales y temporales desconocidas, basados en una muestra de datos de precipitación de 1334 estaciones distribuidas en la zona andina colombiana en el periodo comprendido entre enero de 2007 y noviembre del mismo año. Finalmente, se muestran los mapas de pronósticos espaciales y el espacio–temporal para diciembre con el fin de comparar los resultados obtenidos con ambas técnicas.

**Palabras clave:** proceso estocástico, series de tiempo, geoestadística, geoestadística espacio–temporal.

## Abstract

Currently, public and private entities nationwide, conducted predicting environmental phenomena such as precipitation, with the use of models based on spatial interpolation methods such as inverse distance weighted (IDW) and kriging Thiessen polygons; which takes into account the spatial characteristics of the studied variable. When required to include the temporal dimension, they go to multitemporal analysis scenario forecasts obtained by the above space, work we applied concepts of space – time Geostatistics as a methodological approach to the prediction of such phenomena. Covariance models were used separable space – time to make predictions in space and time unknown locations based on a data sample of 1334 precipitation stations distributed in the Andean region of Colombia in the period from January 2007 until November of the same to \ year. Finally, forecasts show spatial maps and time - space for the month of December in order to compare the results obtained with both techniques.

**Keywords:** stochastic process, time series, geostatistics, space-time geostatistics.

## Introducción

Durante los últimos años ha ido en aumento el desarrollo de metodologías estadísticas para el análisis de procesos que presentan variabilidad en el tiempo y en el espacio, las cuales tienen en cuenta la interacción entre ambas dimensiones, con el fin de incrementar la capacidad predictiva de los métodos de interpolación como el *kriging*, basadas en el uso de modelos de covarianza espacio-temporal.

En este proyecto se emplean conceptos de la teoría de series de tiempo y la geoestadística, en el ámbito de la geoestadística espacio-temporal, la cual es aplicada para modelar el comportamiento de la precipitación en la zona andina colombiana, ofreciendo una alternativa metodológica para la predicción de dicha variable, en comparación con los métodos de interpolación espacial comúnmente empleados.

En la actualidad se cuenta con un planteamiento teórico formal de la geoestadística espacio-temporal, que permite obtener aplicaciones confiables del método. A pesar de que esta rama del conocimiento es relativamente nueva, lo que representa aportes constantes por parte de diversos autores de la comunidad científica, se cuenta con diversas aplicaciones de esta metodología a diferentes variables de carácter ambiental; sin embargo, en Colombia no se identifican antecedentes prácticos de este tipo de modelos para la precipitación, simplemente se emplean análisis multitemporales entre los diferentes escenarios espaciales, obtenidos mediante métodos de interpolación espacial.

El principal objetivo del proyecto radicó en construir un modelo de predicción para la variable precipitación en la zona andina colombiana, utilizando como información muestral datos recolectados por la red pluviométrica nacional del Ideam en la zona de estudio, entre enero y noviembre del 2007, para generar el mapa de pronóstico de diciembre del mismo año. Adicionalmente, se desarrolló un análisis comparativo de los resultados obtenidos entre los modelos espacial y espacio-temporal de diciembre, con el fin de evaluar el grado de confiabilidad del método propuesto.

Entre los limitantes de la metodología se identifican algunos desde el punto de vista teórico y computacional. Teniendo en cuenta que la formulación teórica de la geoestadística espacio-temporal aún se encuentra en constante crecimiento, es de esperar que las nuevas metodologías

planteadas arrojen cada vez mejores resultados. En cuanto al desarrollo de software, no se cuenta en la actualidad con todas las herramientas que faciliten la implementación de las técnicas espacio-temporales. Esta situación fue evidenciada en el presente proyecto, ya que no están suficientemente desarrolladas soluciones de software para plantear un adecuado análisis descriptivo y exploratorio de los datos, desde el punto de vista de la interacción del espacio y el tiempo. Además, el algoritmo que permite la obtención de la covarianza espacio-temporal también se encuentra en construcción, limitando la caracterización del modelo con respecto a los datos empleados.

La metodología empleada para el desarrollo del presente proyecto se basa inicialmente en la consulta de la teoría concerniente a las características del fenómeno dentro de la zona de estudio, el análisis estadístico de series de tiempo, los conceptos fundamentales de la geoestadística y la teoría de la geoestadística espacio-temporal. Posteriormente, se planteó un análisis de las características espaciales de los datos de precipitación mes a mes, mediante el modelamiento espacial de la variable con geoestadística. Esta etapa tenía como principal objetivo obtener el mapa de pronóstico de diciembre de 2007, para ser comparado por el obtenido con el modelamiento espacio-temporal. Finalmente, se desarrolló el modelamiento espacio-temporal de la precipitación, utilizando como base los datos de enero a noviembre y obteniendo pronósticos para diciembre. Esta etapa representó el principal propósito del proyecto, junto al ajuste de un modelo de covarianza separable que permitiera obtener pronósticos confiables del fenómeno.

## Precipitación

Este fenómeno se define como la “fase del ciclo hidrológico que da origen a corrientes de aguas superficiales y profundas. La cantidad de precipitación, depende de variables como la altura, la humedad del aire y la velocidad vertical del mismo” (Maderrey, 2005). La evaluación y conocimiento de la distribución del fenómeno de la precipitación en el espacio y en el tiempo, plantea los problemas básicos de hidrología (Fidalica, 1993). Los tipos de precipitación son:

- **Precipitación ciclónica.** Esta se compone a su vez por la precipitación ciclónica frontal y la no frontal. La frontal puede presentarse por frentes fríos de aire, en la que el aire frío desplaza al aire caliente hacia arriba, generando

nubosidad vertical, representándose en granizo, tormentas o chubascos, mientras que en el frente cálido el aire caliente asciende suavemente sobre el frío, generando lloviznas tenues, pero continuas y prolongadas.

- **Precipitación convectiva.** Este tipo de precipitación se presenta cuando una masa de aire caliente está en medio de masas de aire frío. El aire caliente asciende, se enfría y se condensa formando nubosidad. El aire caliente asciende por calentamiento de la superficie.
- **Precipitación orográfica.** Se presenta por el ascenso de masas de aire obligadas por barreras montañosas.

Figura 1. Pluviómetro.



Fuente: <http://www.ocean-net.com>

Existen los siguientes tipos de instrumentos para la medición de la precipitación: los pluviómetros, los nivómetros y los totalizadores (Maderey, 2005). Básicamente, los pluviómetros constan de un cilindro recto con volumen conocido, un borde agudo horizontal (boca) y un dispositivo que recolecta el agua. La figura 1, ilustra el tipo de pluviómetros más comunes empleados en la actualidad por el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales de Colombia (Ideam), que cuenta con una red de 1463 estaciones con datos de precipitación diaria, mensual, anual y decadal, estaciones fijas distribuidas en todo el territorio nacional.

### Geoestadística espacio-temporal

En muchas ocasiones, los fenómenos que ocurren en la naturaleza requieren de un seguimiento en el espacio a

través del tiempo. Cuando la variación espacial es continua, el modelamiento se enmarca en la rama del conocimiento conocida como geoestadística espacio-temporal, la cual incorpora el tiempo y su interacción con el espacio como argumento de ayuda en la predicción.

El dominio temporal de las observaciones se nota por  $\tau \subseteq \mathbb{R}$ , mientras que el dominio espacial por  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ , aunque para efectos prácticos en el modelamiento espacio-temporal se nota el espacio dimensional como  $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  o  $(\mathbb{R}^{d+1})$ . Por lo tanto, el proceso estocástico<sup>1</sup> espacio-temporal se nota por  $\{Z(\mathbf{s}, t), \mathbf{s} \in D, t \in \tau\}$ , donde  $\mathbf{s}$  corresponde a una ubicación espacial y  $t$  a un instante de tiempo.

El proceso se modela  $Z(\mathbf{s}, t)$  de la siguiente manera: (Isham y Finkenstadt, 2007):

$$Z(\mathbf{s}, t) = \mu(\mathbf{s}, t) + \delta(\mathbf{s}, t) \quad (1)$$

donde es la media del proceso<sup>2</sup> y es la componente de error en el espacio y en el tiempo<sup>3</sup>, que muestra las fluctuaciones del proceso alrededor de la media (Martínez, 2008).

La función media del proceso, se define entonces como:

$$\mu(\mathbf{s}, t) = E[Z(\mathbf{s}, t)] \quad (2)$$

A diferencia de los procesos tratados con geoestadística, donde la variabilidad del proceso se establece mediante la función de semivarianza, en la geoestadística espacio temporal la función que mejor describe la variabilidad del proceso en el espacio y el tiempo conjuntamente es la covarianza, la cual se define como:

$$\begin{aligned} &Cov((\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)) \\ &= E[(Z(\mathbf{s}_1, t_1) \\ &\quad - \mu(\mathbf{s}_1, t_1))(Z(\mathbf{s}_2, t_2) \\ &\quad - \mu(\mathbf{s}_2, t_2))] \end{aligned} \quad (3)$$

En la práctica se tienen en cuenta diferentes supuestos simplificados de la función de covarianza espacio-temporal, como son la separabilidad, la simetría total, la *estacionariedad* y *el soporte compacto*.

<sup>1</sup> Sucesión infinita de variables aleatorias indexadas.

<sup>2</sup> Esta componente también es conocida como tendencia o variación a gran escala.

<sup>3</sup> Esta componente también es conocida como variación a pequeña escala.

Cuando se habla de separabilidad en la función de covarianza del proceso estocástico espacio-temporal  $Z(\mathbf{s}, t)$ , se refiere a que existe una puramente espacial  $C_s()$  y una puramente temporal  $C_t()$  que se puede expresar como:  $C(Z(\mathbf{s}_1, t_1), Z(\mathbf{s}_2, t_2)) = C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) + C_t(t_1, t_2)$  para el caso de la suma y  $C(Z(\mathbf{s}_1, t_1)Z(\mathbf{s}_2, t_2)) = C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)C_t(t_1, t_2)$  en el caso del producto, para todas las coordenadas espacio-temporales  $(\mathbf{s}_1, t_1)$  y  $(\mathbf{s}_2, t_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  (Isham y Finkenstadt, 2007).

Cuando se habla de una función de covarianza espacio-temporal con simetría total, se debe cumplir que  $C(Z(\mathbf{s}_1, t_1), Z(\mathbf{s}_2, t_2)) = C(Z(\mathbf{s}_1, t_2), Z(\mathbf{s}_2, t_1))$ , para todas las coordenadas espacio-temporales  $(\mathbf{s}_1, t_1)$  y  $(\mathbf{s}_2, t_2) \in [\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}]$ .

La separabilidad de la función de covarianza espacio-temporal forma un caso especial de la simetría total, lo que indica que las estructuras de covarianza que no cumplen el supuesto de simetría total, son a su vez no separables (Gneiting y Guttorp, s. f.).

El supuesto de la estacionariedad de la función de covarianza espacio-temporal del proceso estocástico  $Z(\mathbf{s}, t)$ , se evidencia tanto en el caso espacial como en el temporal independiente o conjuntamente: cuando existe función de covarianza espacialmente estacionaria, esta depende únicamente de la separación espacial entre las observaciones  $(\mathbf{s}_1, t_1)$  y  $(\mathbf{s}_2, t_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , definida como  $\mathbf{h} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ , cuando dicha covarianza es temporalmente estacionaria la dependencia de la función está dada por la separación temporal del par de localizaciones, dada por  $u = t_1 - t_2$ . Finalmente, cuando la función de covarianza es tanto espacial como temporalmente estacionaria, esta depende de la separación espacial y temporal de cualquier par de localizaciones de la muestra. Esta condición se evidencia mediante  $C(Z(\mathbf{s}_1, t_1), Z(\mathbf{s}_2, t_2)) = C(\mathbf{h}, u)$ .

Por último, se habla de un proceso espacio-temporal  $Z(\mathbf{s}, t)$  con función de covarianza con soporte compacto, si para cualquier par de localizaciones  $(\mathbf{s}_1, t_1)$  y  $(\mathbf{s}_2, t_2)$ , la covarianza  $C(Z(\mathbf{s}_1, t_1), Z(\mathbf{s}_2, t_2))$  tiende a cero cuando la distancia espacial o temporal es suficientemente grande (Martínez, 2008).

### Modelos de covarianza espacio-temporal empíricos

Al igual que en la geoestadística, en la estimación del covariograma espacio-temporal se parte de un modelo empírico sobre el cual se ajusta un modelo teórico para llevar a cabo

la predicción mediante métodos *kriging*. Se tienen de la misma manera dos tipos de estimadores empíricos, cuyas expresiones son:

#### Estimador clásico

$$2\hat{\gamma}(\mathbf{h}(l), u(k)) = \frac{1}{|N(\mathbf{h}(l), u(k))|} \sum_{(\mathbf{s}_i, t_i), (\mathbf{s}_j, t_j) \in N(\mathbf{h}(l), u(k))} [Z(\mathbf{s}_i, t_i) - Z(\mathbf{s}_j, t_j)]^2, \tag{4}$$

#### Estimador robusto

$$2\hat{\gamma}_u(\mathbf{h}(l), u(k)) = \left[ \frac{1}{|N(\mathbf{h}(l), u(k))|} \sum_{(\mathbf{s}_i, t_i), (\mathbf{s}_j, t_j) \in N(\mathbf{h}(l), u(k))} |Z(\mathbf{s}_i, t_i) - Z(\mathbf{s}_j, t_j)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[ 0.457 + \frac{0.494}{|N(\mathbf{h}(l), u(k))|} \right]^{-1} \tag{5}$$

### Modelos de covarianza separables

Las funciones de covarianza separables están dadas con base en las propiedades aritméticas de adición y multiplicación y se caracterizan porque se definen en una componente puramente espacial y otra puramente temporal (Bohórquez, 2010).

#### Modelo suma

Modelo introducido por Rouhani y Hall (1989), que consiste en la suma aritmética de una componente puramente espacial y otra puramente temporal. Dicho modelo se describe mediante la expresión:

$$C[(\mathbf{s}_1, t_1), (\mathbf{s}_2, t_2)] = C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) + C_t(t_1, t_2) \tag{6}$$

Cuando se consideran a las funciones de covarianza  $C_s(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$  y  $C_t(t_1, t_2)$  estacionarias, su expresión viene dada por  $C(\mathbf{h}, u) = C_s(\mathbf{h}) + C_t(u)$  con  $(\mathbf{h}, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , de acuerdo con los conceptos mencionados de función de covarianza tanto espacial como temporalmente estacionarias.

Este modelo es de gran sencillez, aunque presenta la debilidad en su aplicación que consiste en que la covarianza espacial sumada a la temporal no es definida positiva, sino semipositiva. Este inconveniente se evidencia en casos en

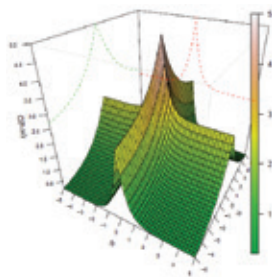
los que el arreglo matricial de covarianzas no es invertible para algunos conjuntos de localizaciones espacio-temporales  $(s_i, t_i)$ , lo cual impide la obtención de predicciones en algunas situaciones (Spadavecchia, 2008).

Al igual que en el caso espacial, las funciones de covarianza espacio-temporales se plantean a través de ecuaciones que pueden ser exponenciales, esféricas, entre otras. A continuación se muestra un ejemplo de una ecuación exponencial de la función de covarianza espacio-temporal separable suma, mediante la cual se efectuó el estudio de la concentración de nitratos en un río de Texas (Martínez, 2008):

$$C(\mathbf{h}, u) = \sigma_s^2 \left[ e^{-\frac{\|\mathbf{h}\|}{c_s}} \right] + \sigma_t^2 \left[ e^{-\frac{\|u\|}{c_t}} \right] \quad (7)$$

Con  $(\mathbf{h}, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ,  $[\sigma_s^2 = C(\theta_s, 0)]$ , la varianza a priori del proceso netamente espacial, la varianza a priori del proceso  $[\sigma_t^2 = C(0, \theta_t)]$  netamente temporal y finalmente  $c_s$  y  $c_t$ , parámetros positivos del modelo de escala espacial y temporal respectivamente.

**Figura 2.** Ejemplo de modelo espacio-temporal separable suma.



**Fuente:** (Martínez, 2008, p. 98).

En la figura 2, se presenta un ejemplo de covarianza espacio-temporal generada para  $\sigma_s^2 = 2.5$ ,  $c_s = 0.5$ ,  $\sigma_t^2 = 2.5$  y  $c_t = 2$ .

### Modelo producto

Este modelo es uno de los más aplicados en el modelamiento espacio-temporal, dada su sencillez y fácil aplicabilidad, además de la reducción de recursos computacionales, debida a la considerable disminución de parámetros a estimar en el modelamiento mediante métodos *kriging*. Consiste en el producto aritmético de una covarianza netamente espacial y otra netamente temporal. Su expresión viene dada por:

$$C((s_1, t_1), (s_2, t_2)) = [C_s(s_1, s_2)][C_t(t_1, t_2)] \quad (8)$$

Al igual que en el modelo de covarianza suma, si se considera la covarianza espacial  $C_s$  y  $C_t$  temporal, estacionarias, se reduce la ecuación anterior a  $C(\mathbf{h}, u) = [C_s(\mathbf{h})][C_t(u)]$  con  $(\mathbf{h}, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .

La debilidad de este modelo se ve representada en la poca interacción entre el espacio y el tiempo, aunque puede ser solucionada empleando producto Kronecker, el cual se aplica entre las matrices de covarianzas obtenidas de espacio y tiempo<sup>4</sup>.

A continuación se muestran las expresiones 9, 10 y 11, de los modelos de covarianza espacio-temporal separable producto, tenidos en cuenta en:

### Modelo exponencial

(Pebesma, *Spatio-temporal geostatistics using gstat*, 2011)

$$C(\mathbf{h}, u) = \begin{cases} C_s \left[ 1 - \left( \frac{3\mathbf{h}}{2a_s} - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{h}}{a_s} \right)^3 \right) \right] \times C_t \left[ 1 - \left( \frac{3u}{2a_t} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{a_t} \right)^3 \right) \right] & , si 0 \leq (\mathbf{h}, u) \leq a_{s,t} \\ 0 & , si (\mathbf{h}, u) \geq a_{s,t} \end{cases} \quad (9)$$

### Modelo esférico

(Martínez, 2008)

$$C(\mathbf{h}, u) = \begin{cases} a_{s,t} & , si (\mathbf{h}, u) \geq 0 \\ C_{0s} \left[ \left( 1 - \frac{3\mathbf{h}}{2a_s} \right) - \left( \frac{\mathbf{h}}{2a_s} \right)^3 \right] \times C_{0t} \left[ \left( 1 - \frac{3u}{2a_t} \right) - \left( \frac{u}{2a_t} \right)^3 \right] & , si 0 \leq (\mathbf{h}, u) \leq a_{s,t} \end{cases} \quad (10)$$

### Modelo gaussiano

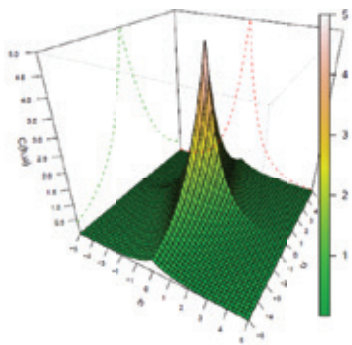
(Bohórquez, 2010)

$$C(\mathbf{h}, u) = \begin{cases} \sqrt{3a_s} \left( 1 - e^{-\left( \frac{\mathbf{h}^2}{a_s^2} \right)} \right) \times \sqrt{3a_t} \left( 1 - e^{-\left( \frac{u^2}{a_t^2} \right)} \right) & , si 0 \leq (\mathbf{h}, u) \leq a_{s,t} \\ 0 & , si (\mathbf{h}, u) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

<sup>4</sup> Si se tiene la matriz espacial  $S$  y  $T$  la temporal, el producto Kronecker entre ellas se notará por  $[S \otimes T]$ . Esta operación matricial, para efectos prácticos en el modelamiento espacio-temporal, facilita reducir recursos computacionales, ya que permite manipular una matriz de covarianzas espacio-temporales de menor tamaño que la manejada en el producto aritmético, pero principalmente, permite incluir la interacción entre el espacio y el tiempo, optimizando la aplicación del modelo producto de covarianzas separable.

Con  $(\mathbf{h}, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ,  $a_s$  y  $a_t$ , parámetros positivos del modelo de escala espacial y temporal respectivamente.

**Figura 3.** Ejemplo de modelo espacio-temporal separable producto.



**Fuente:** (Martínez, 2008, p. 101).

En la figura 3, se presenta un ejemplo gráfico de covarianza espacio-temporal generada para la varianza a priori del proceso estocástico  $\sigma^2 = 10$ ,  $a_s = 1$  y  $a_t = 2$ , que corresponden a parámetros positivos de escala espacial y temporal, respectivamente.

**Estimación espacio-temporal** La estimación espacio-temporal basada en métodos *kriging* es muy similar a la del caso espacial. La diferencia está dada en el planteamiento de las ecuaciones del predictor asociado de cada método y en el planteamiento matricial de covarianzas.

La expresión para la estimación espacio-temporal está dada por:

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0, t_0) = \mu(\mathbf{s}_0, t_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i [Z(\mathbf{s}_i, t_i) - \mu(\mathbf{s}_i, t_i)] \tag{12}$$

Esta expresión define la estimación espacio-temporal sobre un punto con localización espacial y temporal  $(\mathbf{s}_0, t_0)$  desconocidas, siendo  $\hat{Z}(\mathbf{s}_0, t_0)$  el valor estimado de la variable en dichas ubicaciones desconocidas,  $\mu(\mathbf{s}_0, t_0)$  la media del proceso estocástico en la localización a estimar, la cual se asume conocida,  $\lambda_i$  define las ponderaciones o pesos de cada una de las mediciones de la muestra de datos,  $Z(\mathbf{s}_i, t_i)$  representa el valor de cada observación de la muestra y finalmente  $\mu(\mathbf{s}_i, t_i)$ , la media conocida de todo el conjunto de localizaciones espaciales y temporales muestreadas. A

continuación se describen brevemente algunos métodos *kriging* en el espacio-tiempo:

### **Kriging universal**

Este *kriging* también es conocido como un estimador en presencia de tendencia en el proceso estocástico  $Z(\mathbf{s}_i, t_i)$ <sup>5</sup>. En este método de predicción no se busca eliminar la componente aleatoria del proceso, sino modelarla. En ese caso se supone que la media del proceso, aunque desconocida, es una combinación lineal de funciones conocidas o covariables ligadas a las localizaciones espacio-temporales, la cual viene dada por la expresión:

$$\mu(\mathbf{s}, t) = \sum_{i=0}^p \beta_i x_i(\mathbf{s}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{s}, t)' \boldsymbol{\beta}, \tag{13}$$

con  $x(\mathbf{s}, t)$  correspondiente a un vector o función polinómica que contiene las variables explicativas de orden  $(p + 1)$  y  $\boldsymbol{\beta}$ , es un vector de  $(p + 1)$  parámetros desconocidos.

El predictor asociado a este método *kriging* viene dado por:

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0, t_0) = \boldsymbol{\lambda}' \mathbf{Z} \tag{14}$$

Si se hace que la matriz que contiene las funciones polinómicas sea  $x(\mathbf{s}_i, t_i)$ ,  $\mathbf{X}$ , se representan las ponderaciones en términos de la covarianza como:

$$\boldsymbol{\lambda}' = [\mathbf{c} + \mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{x}(\mathbf{s}_0, t_0) - \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}'\mathbf{c})]\boldsymbol{\Sigma}^{-1}, \tag{15}$$

con  $\boldsymbol{\Sigma}$ , la matriz de covarianzas entre las observaciones  $C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j, t_i - t_j)$  y  $\mathbf{c}$ , la matriz de covarianzas en función de las distancias, tanto espaciales como temporales entre las observaciones y el punto a predecir  $(\mathbf{s}_0, t_0)$ , notada por  $C(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_i, t_0 - t_i)$ .

<sup>5</sup> Esta presencia de tendencia del proceso indica que no se cumple el supuesto de estacionariedad de segundo orden o débil, es decir,  $E(Z(\mathbf{s}_0, t_0)) = \mu(\mathbf{s}_0, t_0)$ .

Una vez se cuente con las ponderaciones  $\lambda_i$ , se determina el valor de la variable en el punto donde se desconoce ( $s_0, t_0$ ).

## Metodología

### *Características de la zona de estudio*

Aunque tiene todos los climas, en la zona predomina el de montaña tropical, mientras que en los valles cálidos y húmedos se da el de selva tropical ecuatorial. La temperatura presenta niveles bajo  $0^{\circ}\text{C}$  en los nevados, y puede alcanzar los  $28^{\circ}\text{C}$  en lugares como los valles del Magdalena, Cauca y en la zona del Catatumbo (FIDA-LICA, 1993).

La región Andina recibe este nombre, por estar formada por las tres cordilleras de los Andes. Comprende tanto las montañas, como los valles interandinos del Magdalena y Cauca, en una superficie aproximada a los  $305.000\text{ km}^2$ . Las tres cordilleras tienen picos principalmente de formación volcánica de más de  $4.000\text{ msnm}$ . La Central y la Oriental tienen picos de más de  $5.000\text{ msnm}$  cubiertos de nieves permanentes. La zona Andina colombiana comprende los departamentos de Antioquia, Boyacá, Caldas, Cundinamarca, Huila, Norte de Santander, Quindío, Risaralda, Santander y Tolima (FIDA-LICA 1993).

### *Localización de la zona*

Se extiende desde el sur, en los límites con Ecuador, hasta las estribaciones de las cordilleras en la llanura del Atlántico, en el norte; al occidente limita con la región Pacífica y al Oriente, con la Orinoquía y la Amazonía, tal y como se aprecia en la figura 4.



Fuente: <http://upload.wikimedia.org>

### *Características de la precipitación en la zona de estudio*

La ubicación geográfica, la presencia de las cordilleras y la influencia que tienen las corrientes continuas de aire húmedo que se originan en los océanos, desempeñan un papel importante en la formación de la mayor parte de las lluvias en la zona. En Colombia se presentan dos regímenes o patrones de lluvias, uno denominado monomodal, caracterizado por un largo periodo de lluvias que es seguido por un periodo seco. Este régimen se presenta principalmente en las zonas sur, norte y occidental del país. El segundo régimen se denomina bimodal, se caracteriza por presentar dos periodos lluviosos intercalados por uno seco. Este régimen se manifiesta principalmente en la zona central (Andina) (Montealegre, 2008).

La región Andina presenta una gama muy amplia de niveles de lluvia, que están influenciadas directamente por las condiciones del terreno y la altitud. Las lluvias en esta zona pueden ir desde los  $1500\text{ mm}$  anuales en los valles interandinos, a  $4000\text{ mm}$  al año en los altiplanos y bosques altos andinos (FIDA-LICA 1993).

### *Características de la muestra*

La base de datos empleada para el modelamiento cuenta con lecturas de precipitación para 1334 pluviómetros con datos de todos los meses de 2007. Es decir, la ubicación de las estaciones es la misma para cada escenario temporal. Una descripción más detallada de los mismos se da en la tabla 1:

**Tabla 1.** Características de la muestra.

	Máximo	Mínimo
Rango temporal	01/01/2007	12/01/2007
Coordenada Norte (km)	639.94373	1266.97142
Coordenada Este (km)	549.85307	1216.80056
Magnitud de la precipitación (mm)	3	894

Fuente: cálculos de los autores.

### ***Fenómeno a través del tiempo, empleando series de tiempo***

Corresponde a la primera etapa de análisis de los datos, para la cual se tomaron veinte estaciones al azar, distribuidas en la zona de estudio, y se realizaron las correspondientes gráficas de series de tiempo para cada una. El propósito de este procedimiento radicó en la evaluación del comportamiento del fenómeno en el transcurso del tiempo. Los resultados y la evaluación de los mismos, se reflejan en el capítulo 4.

### ***Modelamiento espacio-temporal para el conjunto de datos del año 2007***

#### **Eliminación de tendencia espacial y temporal**

Eliminar la tendencia espacio-temporal consistió en seleccionar un modelo de regresión de primer orden, ya que cuando se pretende aplicar un modelo de segundo orden como en el caso espacial, no se obtiene una solución al momento de aplicar *kriging* universal. La expresión del modelo seleccionado fue:

$$\text{Precipitación} = x + y + \epsilon \quad (16)$$

con  $(x, y)$ , las coordenadas planas de cada estación o pluviómetro.

Como se puede observar, este modelo solo tiene en cuenta las características espaciales de la variable, ya que en la parte temporal no se requiere la eliminación de la tendencia, teniendo en cuenta la baja resolución temporal del conjunto de datos.

### ***Ajuste y selección de un modelo de covarianza espacio-temporal óptimo para la predicción***

Ajustar el modelo óptimo de covarianza espacio-temporal, representó la principal actividad del proyecto, ya que, en el desarrollo teórico de la geoestadística espacio-temporal, dicho ajuste asegura que las predicciones sean óptimas. Teniendo en cuenta la interacción entre el espacio y el tiempo que se obtiene al aplicar los modelos de covarianza separable producto, se ajustaron el modelo exponencial, esférico y gaussiano. Sobre estos tres modelos aplicados, se seleccionó el que mejor describió la variabilidad del fenómeno en el espacio-tiempo.

Definir y ajustar los parámetros del modelo consistió inicialmente en plantear un modelo de semivarianza espacial, que incluyó todo el conjunto de datos. A este modelo se le nombra variograma espacial agrupado<sup>6</sup> de la muestra (Pebesma, *Spatio-temporal geostatistics using gstat*, 2011).

Una vez se cuenta con los parámetros iniciales que llevará el modelo espacio-temporal, continúa el proceso con la gráfica del modelo empírico de covarianza espacio-temporal, sobre el cual se ajusta el modelo teórico.

La etapa final del modelamiento de la covarianza consiste en ajustar los parámetros al modelo teórico.

#### ***Validación cruzada***

Esta etapa consiste en validar cuál es el modelo óptimo de covarianza espacio-temporal, mediante un algoritmo que extrae un valor muestral  $Z(s_i, t_i)$  de la base de datos inicial y empleando las demás observaciones se estima el valor de la variable en la posición extraída, esta “nueva observación” se nota por diferentes autores como  $Z(s_i, t_i) - i^7$  (Ibañez, 2003). Finalmente, entre más cercana a cero sea la diferencia entre el valor muestreado y el predicho, el modelo de covarianza será el más óptimo.

#### ***Predicción espacio-temporal***

La predicción espacio-temporal define un algoritmo de interpolación *kriging*, basado en el modelo óptimo de covarianza espacio-temporal separable seleccionado, mediante el cual se genera un mapa final de pronóstico de precipitación en la zona andina colombiana para el mes de diciembre, como se muestra en los resultados. Con base en este mapa, se plantea un análisis comparativo entre los resultados obtenidos con los métodos geoestadísticos y los obtenidos con geoestadística espacio-temporal. La rutina empleada para la aplicación del método de interpolación *kriging* universal es:

## **Resultados**

**Series de tiempo para una muestra de estaciones distribuidas en la zona de estudio.** Estas gráficas fueron planteadas para realizar un análisis de tendencia temporal, sobre una

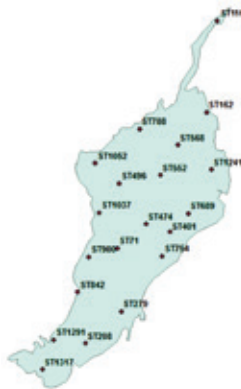
<sup>6</sup> Los modelos de semivarianza agrupados consisten en la generación de modelos de semivarianza que incluyen datos intercalados de toda la base de datos de 12 meses, con el fin de obtener los parámetros iniciales de los modelos de covarianza espacio-temporal separables.

<sup>7</sup> El subíndice  $(i)$ , nota el valor de la variable en la posición extraída.



muestra de estaciones distribuidas en la zona de estudio. En la figura 5, se observan las estaciones seleccionadas como muestra para el análisis de tendencia temporal y su distribución dentro de la zona de estudio.

**Figura 5.** Muestra de estaciones seleccionadas en series de tiempo sobre la zona de estudio.

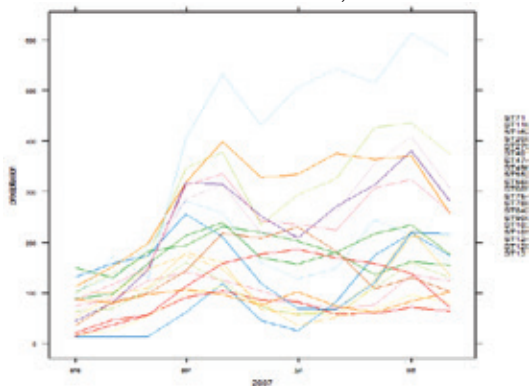


**Fuente:** elaboración propia, generada en software R.

En las figura 6 y 7, se presentan las series de tiempo para cada estación de la muestra.

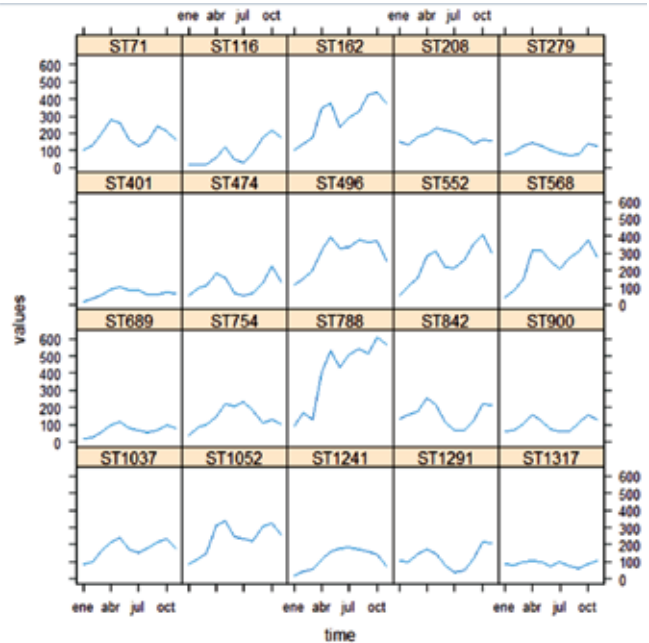
Se puede observar de estas figuras, que el comportamiento de la precipitación presenta una tendencia similar en cualquier ubicación de la zona Andina. Las características de las gráficas evidencian estacionalidad, por los picos de precipitación hacia mayo y septiembre, y presencia de poca precipitación en junio y diciembre. Este patrón es de esperarse, de acuerdo con el régimen climático de la zona, donde existen dos periodos lluviosos y dos periodos secos (Montealegre, 2008).

**Figura 6.** Series de tiempo de las estaciones seleccionadas en conjunto.



**Fuente:** elaboración propia, generada en software R.

**Figura 7.** Series de tiempo de las estaciones seleccionadas individualmente.



**Fuente:** elaboración propia, generada en software R.

### **Mapas de pronóstico obtenidos mediante el modelamiento espacial**

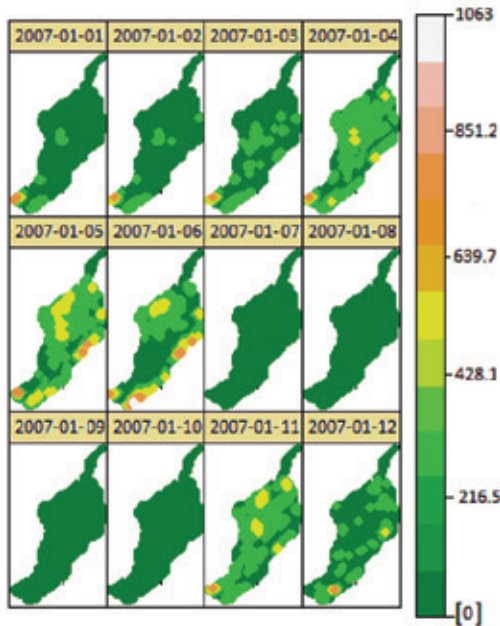
Los mapas de pronóstico para los meses de enero a diciembre de 2007, aplicando *kriging* universal en la zona Andina colombiana, hecha por medio de análisis geoestadístico, se pueden observar de la figura 8.

En estos mapas (figura 8), se puede observar el carácter bimodal de la precipitación durante año, que describe un periodo seco entre enero y marzo, con un intervalo de valores aproximados de 5 a 217 mm; un periodo húmedo de abril a junio, con valores aproximados entre 217 y 1063 mm; nuevamente un periodo seco de julio a octubre con un intervalo aproximado de 5 a 217 mm; un pequeño periodo húmedo en noviembre, con valores entre 5 y 850 mm, y finalmente un periodo seco en diciembre, con valores aproximados entre 5 y 630 mm.

**Modelamiento espacio-temporal** Inicialmente se asume separabilidad en el modelo de covarianza, supuesto que permite plantear un modelo de covarianza netamente espacial  $C_s()$  y uno netamente temporal  $C_t()$ , tal y como se vio en la teoría. Se removió la tendencia espacial y se identificó

estacionalidad temporal, la cual no fue removida dada la baja resolución temporal con la que se cuenta.

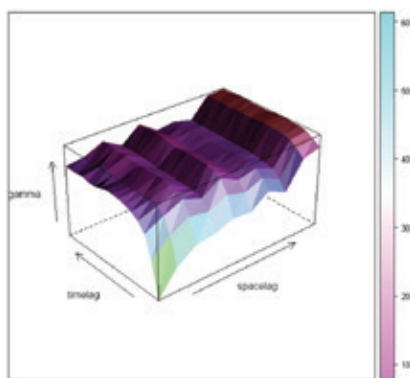
**Figura 8.** Mapas de pronósticos con kriging universal.



Fuente: elaboración propia, generada en software R.

Una vez se establecieron las características asumidas para el modelo, se genera la gráfica del modelo de covarianza espacio-temporal empírico, sobre el cual se ajusta un modelo de covarianza teórico. Dicho modelo se muestra en la figura 9.

**Figura 9.** Modelo de covarianza empírico espacio – temporal.



Fuente: elaboración propia, generada en software R.

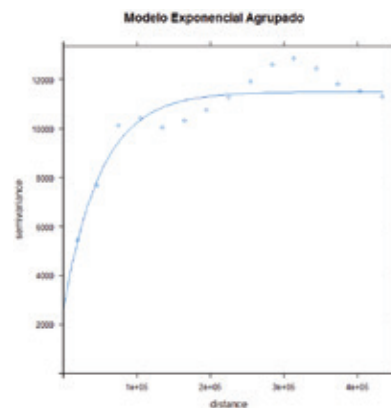
Los modelos de covarianza teóricos que se desarrollaron corresponden al modelo separable producto visto en la teoría, ya que, como se mencionó, este tipo de modelos reducen los recursos computacionales, además de presentar

una mayor interacción entre el espacio y el tiempo que los demás modelos separables de covarianza espacio-temporal. Se ajustan tres modelos: el exponencial, el esférico y el gaussiano. A diferencia del caso espacial, donde el software trae programados los modelos implícitamente, en el caso espacio-temporal es necesario plantear la fórmula del modelo, al igual que sus parámetros.

Se planteó un modelo netamente espacial, el cual se usa en el caso espacio-temporal, para definir unos parámetros iniciales a sentimiento, que se ajustan y se aplican en el posterior modelo espacio-temporal. Como se mencionó en la metodología, este modelo se conoce como el modelo de semivarianza espacial agrupado de la muestra.

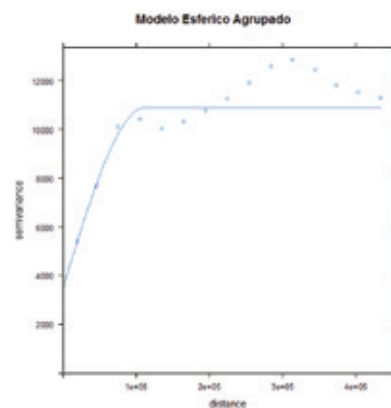
En las figuras 10 a 12, se muestra el semivariograma espacial agrupado para cada uno de los modelos seleccionados:

**Figura 10.** Modelo de semivarianza espacial agrupado, base del modelo de covarianza espacio-temporal exponencial.



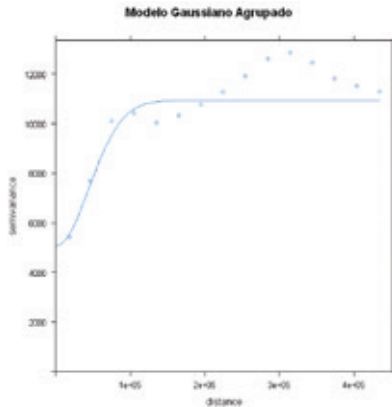
Fuente: elaboración propia, generada en software R.

**Figura 11.** Modelo de semivarianza espacial agrupado, base del modelo de covarianza espacio-temporal esférico.



Fuente: elaboración propia, generada en software R.

**Figura 12.** Modelo de semivarianza espacial agrupado, base del modelo de covarianza espacio-temporal gaussiano.



Fuente: elaboración propia, generada en software R.

En la tabla 2 se muestran los parámetros ajustados de cada modelo de semivarianza, que fueron usados como parámetros iniciales del modelo de covarianza espacio-temporal.

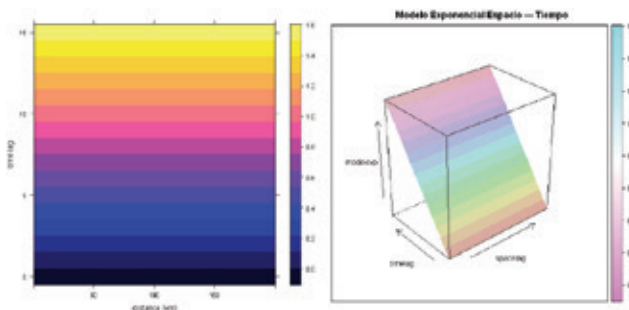
**Tabla 2.** Parámetros de los modelos de semivarianza, base de los modelos de covarianza espacio-temporal.

Modelo	Pepita	Meseta	Rango
Exponencial	2978.849	8617.822	51541.44
Esférico	3852.156	7171.340	113252
Gaussiano	4808.696	6289.446	50152.85

Fuente: cálculos de los autores.

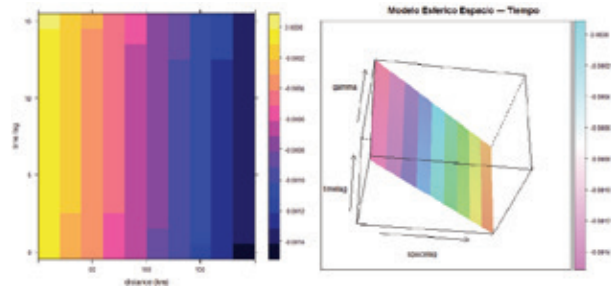
Las figuras 13, 14 y 15, muestran cada uno de los modelos de covarianza espacio-temporal. En ellas, la gráfica de la izquierda representa el modelo en dos dimensiones, donde se pueden observar las magnitudes evaluadas de la covarianza espacio-temporal en colores, y a la derecha, en tres dimensiones.

**Figura 13.** Modelo de covarianza exponencial 2d (izquierda). Modelo de covarianza exponencial 3d (derecha).



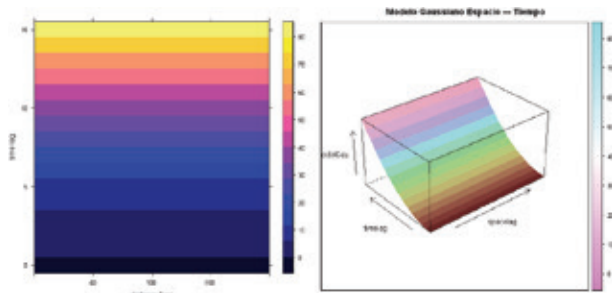
Fuente: elaboración propia, generada en software R.

**Figura 14.** Modelo de covarianza esférico 2d (izquierda). Modelo de covarianza esférico 3d (derecha).



Fuente: elaboración propia, generada en software R.

**Figura 15.** Modelo de covarianza gaussiano 2d (izquierda). Modelo de covarianza gaussiano 3d (derecha).



Fuente: elaboración propia, generada en software R.

En la tabla 3 se tienen los parámetros ajustados de los modelos de covarianza espacio-temporal tenidos en cuenta.

**Tabla 3.** Parámetros ajustados de los modelos de covarianza espacio-temporal

Modelo	Meseta	Rango Espacial	Rango Temporal
Exponencial	10615.97	4641.785	0.0003231516
Esférico	59183.37	62917.78	109058.48
Gaussiano	1152.254	4884.116	0.004453178

Fuente: cálculos de los autores.

La selección del modelo de covarianza espacio-temporal más adecuado para la predicción se determinó con el error medio cuadrático obtenido mediante validación cruzada. Dicho resultado se muestra para cada modelo en la tabla 4.

**Tabla 4.** Menor error de predicción en la validación cruzada para cada modelo.

Modelo	e2
Exponencial	1.4259
Esférico	0.7501
Gaussiano	219.518'600.412

Fuente: cálculos de los autores.

El modelo óptimo de covarianza espacio–temporal para el conjunto de datos de precipitación entre enero y noviembre de 2007 corresponde al esférico, ya que tiene el menor error de predicción en la validación cruzada.

La pepita no debe superar el 50% de la meseta para los modelos de covarianza espacio–temporal, en caso contrario las predicciones que se obtengan pueden ser muy imprecisas. En la tabla 2, que muestra los parámetros de los modelos de semivarianza, solo el modelo exponencial cumple con dicha condición, sin embargo se sostiene la selección del modelo esférico, ya que en este tipo de estudios el error de predicción en la validación cruzada tiene más peso que la interpretación de parámetros del modelo de covarianza. Por otro lado, la meseta, que se define como el valor máximo que adopta el modelo de variograma para distancias elevadas más allá de las cuales no hay auto correlación espacial (Fortin y Dale, 2005), no supera el valor de 10 000 en ninguno de los tres modelos, representando una baja variabilidad.

El rango puede asimilarse como la distancia para la cual los valores de la variable dejan de estar correlacionados. De las tablas 2 y 3, que muestran los parámetros base y los ajustados de los modelos respectivamente, se observa que el valor de este no supera los 63 km, por lo que el fenómeno puede interpretarse localmente estacionario (Isaaks y Srivastva, 1989).

El rango temporal de la tabla 3 para el modelo esférico esta dado en días, este valor se puede interpretar como el rango en el cual se pueden realizar predicciones en el tiempo. La inconsistencia que se observa de este parámetro puede deberse a que los datos con que fue llevado a cabo el estudio tenían una resolución temporal de solo doce meses; de todas maneras, si se contara con una resolución temporal mayor, se podría mejorar sustancialmente la consistencia de dicho parámetro con la realidad del fenómeno.

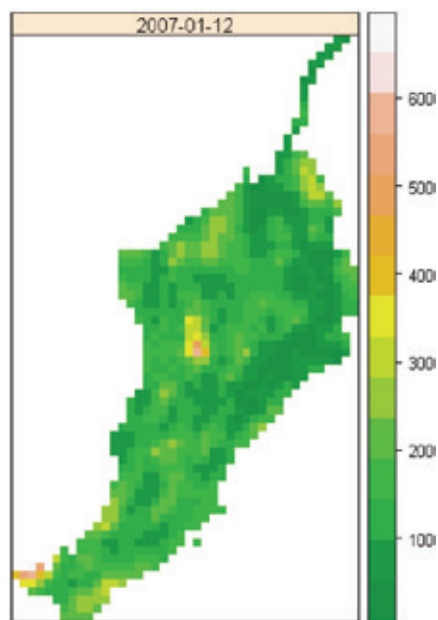
### **Mapa de pronóstico espacio–temporal de diciembre**

Finalmente, el mapa obtenido utilizando *kriging* universal espacio–temporal, cuyo modelo de covarianza corresponde al esférico, de acuerdo con la selección realizada mediante validación cruzada se muestra en la figura 16.

**Análisis comparativo entre las predicciones espaciales y espacio–temporales de diciembre de 2007.** Esta es la etapa final del proyecto, la cual correspondió al análisis de

los resultados obtenidos mediante el modelamiento espacial, frente a los obtenidos en el modelamiento espacio–temporal. Para ello se realizó inicialmente una comparación gráfica que relacionó ambos grupos de datos pronosticados. Este análisis gráfico se puede ver en la figura 17.

**Figura 16.** Mapa de predicción espacio–temporal, diciembre de 2007, modelo esférico.



**Fuente:** elaboración propia, generada en software R.

La figura 17, muestra la similitud existente entre los resultados espaciales, frente a los espacio–temporales, ya que la línea de tendencia (verde), se aproxima a 45°.

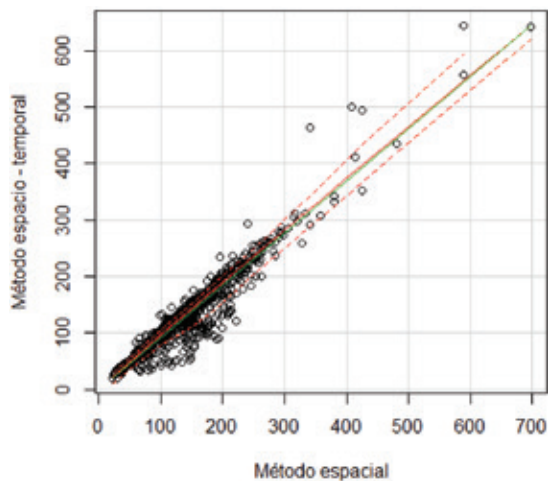
Por otra parte, se verifica la bondad de las predicciones espacio–temporales mediante el cálculo de la diferencia relativa entre las predicciones espaciales, con respecto a las espacio–temporales, dado por la siguiente expresión:

$$\text{diferencia relativa} = \frac{(\text{predicción espacio-temporal}) - (\text{predicción espacial})}{\text{predicción espacial}}$$

Este cálculo estadístico, arrojó para los 1000 datos pronosticados mediante ambos métodos, una diferencia relativa promedio de 7,6261%, lo que permite aseverar que la metodología del modelamiento espacio–temporal contiene un alto grado de confianza frente al espacial<sup>8</sup>.

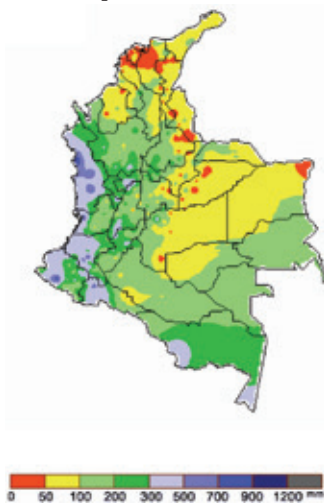
<sup>8</sup> Se asume el método espacial como el más confiable, ya que es el de mayor aplicación en las entidades encargadas de la predicción de la precipitación.

**Figura 17.** Comparación gráfica de resultados espaciales, frente a los espacio-temporales.



**Fuente:** elaboración propia, generada en software R.

**Figura 18.** Mapa de predicción en diciembre de 2007 para todo el territorio colombiano definido por el Ideam.



**Fuente:** Ideam (2007).

Por último, se comparó el comportamiento de las predicciones obtenidas mediante geostatística espacio-temporal con un mapa de predicción de diciembre de 2007 generado por el Ideam, el cual se puede ver en la figura 18, con el fin de verificar si el comportamiento de las predicciones es acorde con el comportamiento real de la precipitación. De la figura 16, mapa de predicción espacio-temporal de diciembre de 2007, se puede observar que las predicciones en la mayor parte de la zona Andina tienen un valor de entre 100 y 200 mm, lo que es

consistente con el comportamiento que se observa en el mapa de precipitación del Ideam, donde esta ronda valores entre 75 y 200 mm. En algunas zonas de la parte norte se presenta un aumento en el valor de las predicciones, rondando entre 350 y 500 mm, comportamiento similar que también se registra en el mapa de precipitación del Ideam con los mismos valores.

Se puede concluir que las predicciones obtenidas en el presente estudio, comparadas con los resultados del Ideam describen bastante similitud, lo que representa un alto grado de satisfacción en la metodología propuesta.

## Conclusiones

Para modelar la precipitación en la zona Andina colombiana en diciembre de 2007, se implementaron los tres modelos de covarianza espacio-temporal definidos inicialmente, mediante el procedimiento de validación cruzada; se encontró el modelo esférico como el que mejor describe la variabilidad de los datos.

El ajuste de las predicciones obtenidas con modelos de geostatística espacio-temporal, respecto a los valores medidos en diciembre por los pluviómetros del Ideam, presentan un comportamiento similar, tanto en rango de valores como en distribución geográfica, es decir, las predicciones obtenidas con geostatística espacio-temporal se aproximan al comportamiento real de la precipitación en la zona Andina.

Pese a limitantes como la falta de desarrollo de rutinas y teoría, que impiden una mejor aplicación del método espacio-temporal, y aunque estas mismas limitantes pueden restar credibilidad al método propuesto, los resultados obtenidos son aceptables frente a los obtenidos del modelamiento espacial. El método espacio-temporal no deja de ser menos confiable y aplicable.

Las predicciones obtenidas en el presente estudio, comparadas con los resultados del IDEAM, describen bastante similitud, lo que representa un alto grado de confianza en la metodología propuesta.

## Recomendaciones

El método espacio-temporal presenta algunas limitantes, teniendo en cuenta que su desarrollo teórico, se encuen-

tra aún en crecimiento. Además, las rutinas del software R para el modelamiento espacio-temporal aún no están totalmente desarrolladas. Ejemplo de ello, no fue posible definir un modelo de regresión lineal de segundo orden que incluya el aspecto espacial y temporal, con el fin de eliminar la tendencia del proceso.

Comparando los valores predichos con las dos metodologías, se encuentra que no es grande la diferencia, teniendo en cuenta que el ajuste de los parámetros de los modelos de covarianza espacio-temporal solo se hicieron por MCO al no encontrarse desarrolladas las rutinas para los otros métodos, mientras que en el caso espacial se realizó por MCO, MV CP, ML y REML, lo cual puede restar confiabilidad a los resultados obtenidos.

## Referencias

- Bardossy, A. (s.f). *Introduction to Geoestadistics*. Institute of hydraulic engineering.
- Bohórquez, M. (2010). *Diferenciabilidad de funciones de covarianza espacio-temporal no separables*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional, Departamento de Estadística.
- C. Cressie, A. (1993). *Statistics for Spatial Data. Revised Edition*. Iowa, EE.UU.: Iowa State University.
- Correa, E. (2004). *Serie de tiempo: conceptos básicos*. Medellín, Colombia: Universidad Nacional, Facultad de Ciencias, Departamento de matemáticas.
- Cressie, J.J., y Majue, N. (1997), *Spatio-Temporal Statistical Modeling of Livestock Waste in Streams*.
- De Cesare, Myers D, and L. and D Posa. *Estimating and modeling space-time correlation structures*. 2001.
- De Iaco, D. y Myers, S. (2002). Nonseparable Space-time Covariance Models: Some Parametric Families. *Mathematical Geology*.
- Díaz, M. A. (2002) *Geoestadística Aplicada*. Cuba: Instituto de Geofísica (UNAM), Instituto de Geofísica y Astronomía, CITMA.
- Fondo Internacional de Desarrollo Agrícola, FIDA-Instituto Internacional de Cooperación para la Agricultura, IICA (1993). *Colombia Sector Agropecuario*. Bogotá, Colombia: FIDA-LICA.
- Fortin, M. y Dale, M. (2005). *Spatial Analysis. A guide for ecologists*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Fuentes, M. P.; Guttorp, P. Diggle, A. (2010). *Handbook of Spatial Statistics*. Boston, EE.UU.: Department of Biostatistics, Harvard School of Public Health.
- Gneiting, P. Guttorp, T. (s.f.) *Geoestadistical space - time models, stationarity, separability and full symmetry*. Washington: Department of Statistics University of Washington.
- Gotway, C. A. Schabenberger, O. (2005) *Statistical Methods for Spatial Data Analysis Texts in Statistical Science*. Boca Raton, London, Nueva York, Washington, D. C.: Chapman and Hall/CRC, A CRC Press Company.
- Ibáñez Gual, M. V. (2003). *Modelos estadísticos espacio-temporales en perimetría*. Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales, Universidad de Jaume.
- IGAC (1973). *Estimación de modelos de semivarianza para algunas variables fisicoquímicas y biológicas medidas en el estuario Ciénaga Grande de Santa Marta*, Bogotá.
- Isaaks, M. y Srivastva, E. (1989). *Applied Geoestadistics*. Oxford University Press.
- Isham, Held L. y Finkenstadt, V. (2007). *Statistical Methods for Spatio-Temporal Systems*. Boca Raton, London, Nueva York, Washington, D. C.: Chapman and Hall/CRC, A CRC Press Company.
- Maderey, L. E. (2005). *Principios de hidrogeografía, estudio del ciclo*. Instituto de Geografía, Universidad Autónoma de México.
- Martínez, R. F. (2008). *Modelización de la función de covarianza en procesos espacio-temporales: análisis y aplicaciones*. Valencia: Universidad de Valencia.
- Montealegre, B. J. (2008). *Estudio de la variabilidad climática de la precipitación en Colombia asociada a procesos oceánicos y atmosféricos de meso y gran escala*. Bogotá: Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales (IDEAM) - Subdirección de Meteorología.
- Pebesma, E. (2011) *Spatio-temporal geostatistics using gstat*. Munster: Institute for Geoinformatics (IFGI) University of Munster.
- Pebesma, E. Graeler, B. y Gottfried, T. (2011). *Classes and methods for spatio-temporal data. Package Ospacetime 0 Version 0.5-5*. Munster, Germany: Institute for Geoinformatics (IFGI), University of Munster.
- Peña, D. (1999) *Análisis de series temporales*. España: Alianza.
- Spadavecchia, L. (2008). *Spatio - temporal Geoestadistical methods*.

