

DISEÑO PARA EL MOMENTO TORSOR EN LOSAS DE CONCRETO REFORZADO

RAÚL CARO OLARTE

Ingeniero Civil Universidad La Gran Colombia, Magíster en Estructuras Universidad Nacional de Colombia. Catedrático Universidad Católica de Colombia y Universidad La Gran Colombia
raulcaroo@hotmail.com

Clasificación
Categoría Colciencias: 1

Fecha de recepción: 22-09-2002

Fecha de aceptación: 30-05-2003

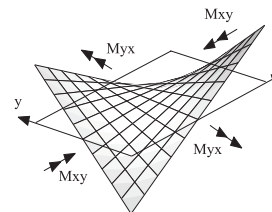
Palabras claves: Placas macizas, diseño estructural, losa, lámina, estructura laminar, norma NSR-98.

Key words: NSR-98 norm, structural desing, laminar, laminar structure, flat slabs.

1. Introducción

En el diseño de estructuras especiales cobra importancia el estudio minucioso del comportamiento de las estructuras laminares; para ello existen en el mercado poderosas herramientas para su análisis mediante el método de los elementos finitos. Tal es el caso de las placas macizas o losas¹ de concreto reforzado, en especial en compartimentos estancos (tanques de almacenamiento de líquidos, desarenadores, floculadores, etc.). El modelado y análisis mediante las herramientas existentes parecen ser etapas ya superadas. Sin embargo, la etapa

siguiente, el diseño, presenta ciertos vacíos en nuestro medio por la falta de comprensión del concepto de los valores obtenidos, ya que generalmente se salen del alcance de los cursos de estructuras del pregrado.



¹ Estructuras laminares solicitadas principalmente a momentos.

Se plantea aquí un enfoque didáctico del concepto del *momento torsor*, obtenido del análisis estructural de losas (M_{xy}) y el consecuente diseño mediante un método deductivo del mismo. Por ser solamente intuitivo, este enfoque carece de deducciones matemáticas, llegándose a similares resultados que con planteamientos matemáticos complejos.

2. La Norma Sismo Resistente (NSR-98)

Acerca del diseño en concreto reforzado, la normativa vigente menciona explícitamente que la metodología empleada para el análisis debe tener en cuenta las deformaciones elásticas o inelásticas causadas por las fuerzas que producen torsión, cuando sus efectos sean superiores al 5% de las deformaciones por flexión (sección C.8.4).

La norma trata principalmente del diseño en concreto de estructuras reticulares; por esto considera el diseño a momento torsor de vigas o columnas con torques alrededor de su eje longitudinal. Este es bastante diferente, como ya se verá, al concepto de *momento torsor en losas*.

La NSR-98 omite específicamente el tema de *momentos torsores en losas*, y sobre tanques y otros compartimentos estancos incluye el Capítulo 20, el cual es muy superficial en su contenido. No obstante, para llevar a cabo lo establecido en la sección C.8.4. de la NSR-98 en losas debe tenerse en cuenta el momento torsor; así mismo, en el control de fisuras en compartimentos estancos no debe permitirse la exclusión de su efecto. Para todo lo anterior cobra importancia lo aquí tratado.

3. Definición de variables

Para distinguir los valores de diseño de la cara inferior de la losa con respecto a los de su cara superior se colocará una comilla a estos últimos (M_{ux} , M_{ux}' ; M_{uy} , M_{uy}' y correspondientemente A_{sx} , A_{sx}' ; A_{sy} , A_{sy}').

A_{sx} , A_{sy} : área del acero de refuerzo a tensión por unidad de ancho de losa, en dirección X y Y

b : ancho de viga

d : profundidad efectiva del refuerzo a tensión

dx , dy : longitudes diferenciales de viga o losa

E : módulo de elasticidad

f_a : resistencia del acero a la fluencia

f_y : resistencia a la compresión a los 28 días, del cilindro normalizado de concreto

K : rigidez a flexión de la losa, definida como $K = \frac{E t^3}{12(1 + \mu)}$

M_x , M_y : momentos flectores actuantes mayorados por ancho unitario de losa, en dirección X y Y

M_{xy} : momento torsor actuante mayorado por ancho unitario de losa

M_{ux} , M_{uy} : momentos resistentes de la sección por ancho unitario de losa en dirección X y Y

t : espesor de viga o losa

p : carga externa mayorada sobre la viga o la losa

R : fuerzas de reacción en los apoyos de la viga o la losa

∂ : derivada parcial de la función

ϕ : factor de reducción de resistencia. Para la flexión, la NSR-98 establece $\phi_f = 0,90$ esfuerzos normales en la sección de

σ : viga o losa

cuantía de acero suministrado, definida

ρ : como: $\rho = A_s/d$

cuantía de acero balanceada

ρ_b : cuantía de acero máxima a suministrar

ρ_{max} : cuantía de acero mínima a suministrar

ρ_{min} : relación de Poisson. Para el concreto

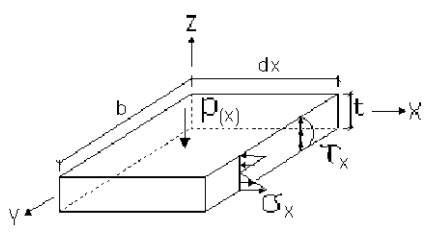
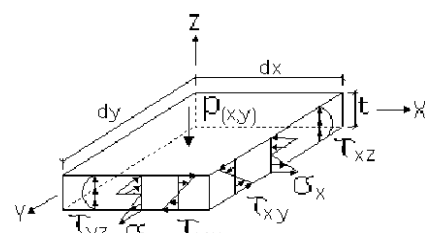
μ : su valor está comprendido entre 0,15 y 0,20. Los textos generalmente asumen 1/6. Si no se conoce el valor experimentalmente, la NSR-98 sugiere usar 0,20

τ : esfuerzos cortantes en la sección de viga o losa

ω : deflexión elástica en vigas y losas.

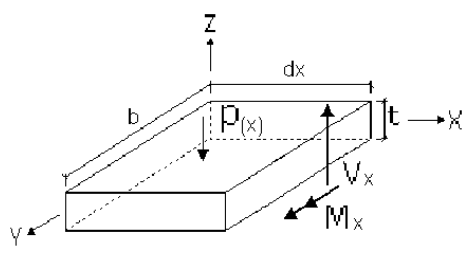
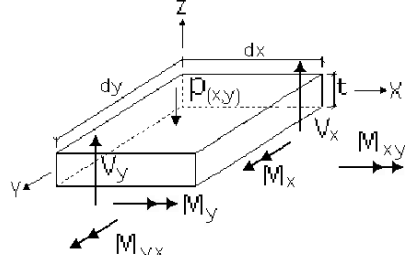
4. La losa en analogía con la viga

Un caso particular de la losa es la viga (losa de ancho pequeño), de comportamiento dominado en nuestro ámbito. En consecuencia, a continuación se realiza un análisis inductivo para la comprensión del comportamiento correspondiente a la losa como caso general.

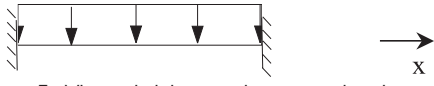
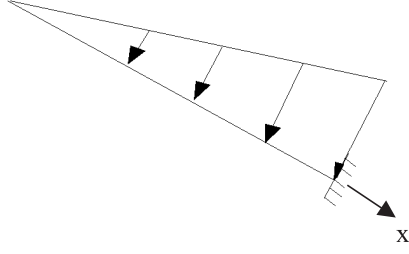
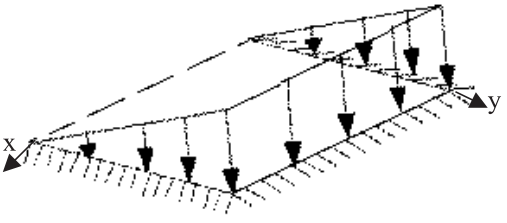
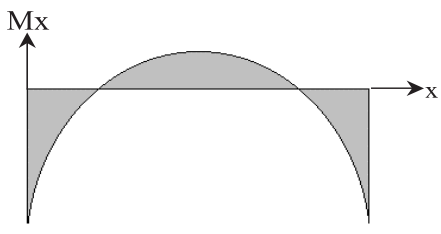
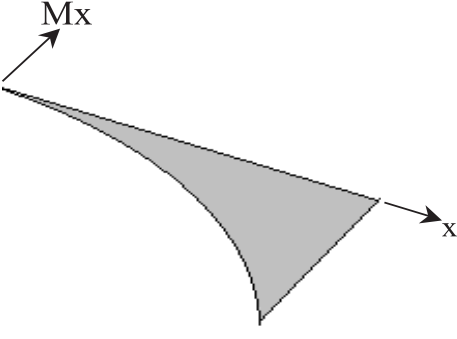
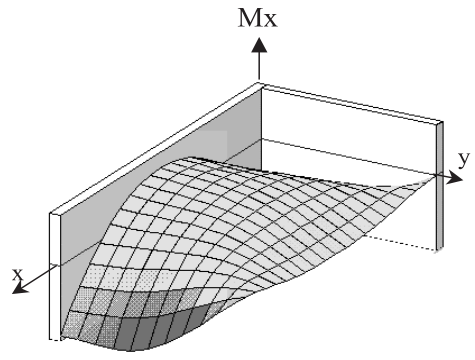
VIGAS	LOSAS
Ecuación de equilibrio	
$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -P(x)$ (1)	$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P(x,y)$ (2)
Ecuación general²	
$\frac{d^4 \omega(x)}{dx^4} = \frac{P(x)}{EI}$ (3)	$\frac{\partial^4 \omega(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega(x,y)}{\partial y^4} = \frac{P(x,y)}{K}$ (4)
Métodos de análisis	
Integración directa Series simples Diferencias finitas Elementos finitos	Series simples Series dobles Diferencias finitas Elementos finitos
Esfuerzos en la sección	
 <p>Figura 1. Esfuerzos en la viga.</p>	 <p>Figura 2. Esfuerzos en la losa.</p>
Fuerzas internas que producen estos esfuerzos³	

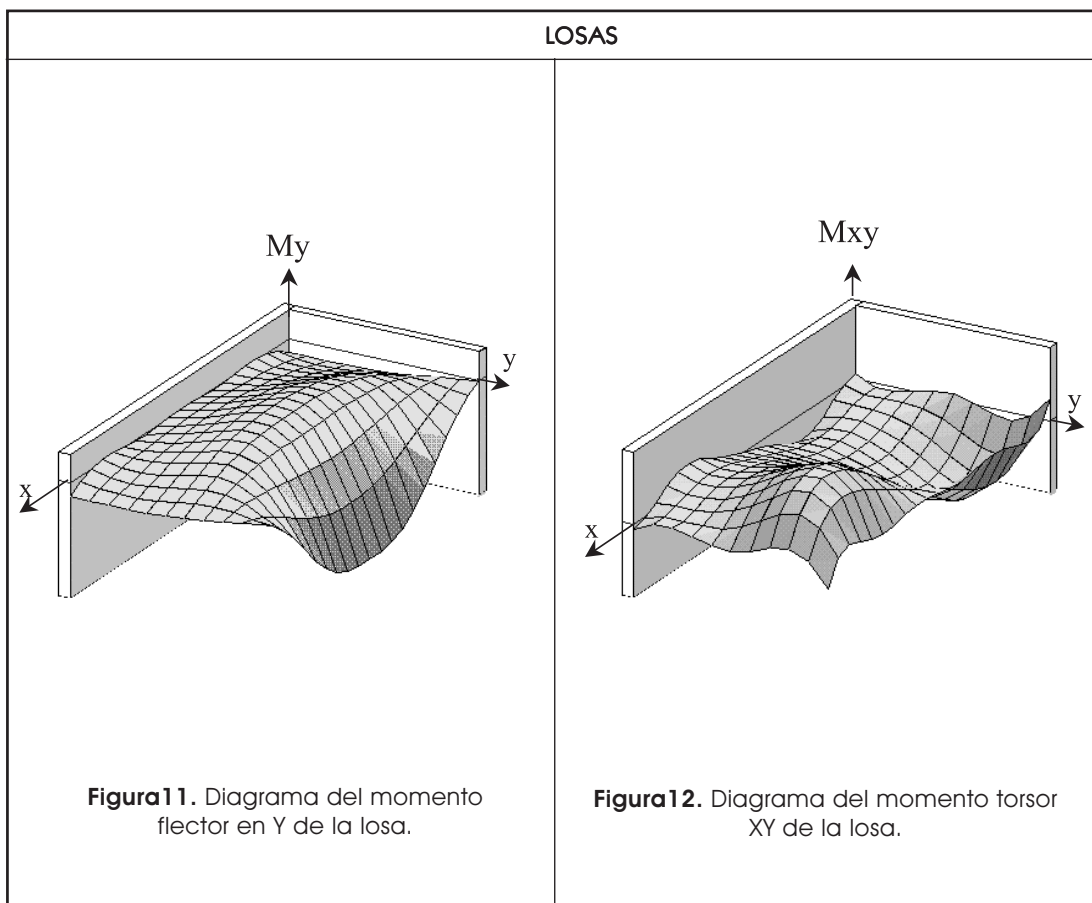
¹ Suele llamarse «y» a la deflexión elástica en vigas y «ω» en losas. Con fines de comparación, se unifica esta nomenclatura.

² Momentos y fuerzas cortantes por unidad de ancho.

VIGAS	LOSAS
$M_x = b \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (5)$	$V_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (7)$
$V_x = b \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (6)$	$V_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (8)$
	$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (9)$
	$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad (10)$
	$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (11)$
Representación de las fuerzas internas en la sección ⁴	
 <p data-bbox="324 1081 787 1123">Figura 3. Fuerzas internas en la viga.</p>	 <p data-bbox="917 1081 1323 1123">Figura 4. Fuerzas internas en la losa.</p>
Relación entre las fuerzas internas y la deflexión elástica	
$V_x = -\frac{1}{EI} \left(\frac{d^3 \omega(x)}{dx^3} \right) \quad (12)$	$V_x = -K \left(\frac{\partial^3 \omega(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega(x,y)}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (14)$
$M_x = -EI \left(\frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right) \quad (13)$	$V_y = -K \left(\frac{\partial^3 \omega(x,y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega(x,y)}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (15)$
	$M_x = -K \left(\frac{\partial^2 \omega(x,y)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega(x,y)}{\partial y^2} \right) \quad (16)$
	$M_y = -K \left(\frac{\partial^2 \omega(x,y)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega(x,y)}{\partial x^2} \right) \quad (17)$
	$M_{xy} = -K(1-\mu) \frac{\partial^2 \omega(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (18)$

⁴ Para no saturar los gráficos, no se indican los esfuerzos ni las fuerzas internas de las caras posteriores.

VIGAS	LOSAS
Fuerzas de reacción	
$R_x = V_x \quad (19)$	$R_x = V_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (20)$
	$R_y = V_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (21)$
Ejemplos	
 <p>Figura 5. Viga doblemente empotrada.</p>  <p>Figura 6. Viga en voladizo.</p>	 <p>Figura 7. Losa con tres bordes empotrados y un borde libre.</p>
Resultados gráficos del análisis de los ejemplos	
 <p>Figura 8. Diagrama del momento flector de la viga doblemente empotrada.</p>  <p>Figura 9. Diagrama del momento flector de la viga en voladizo.</p>	 <p>Figura 10. Diagrama del momento flector en X de la losa.</p>



5. Bases para el análisis y diseño

Como se estudia en los cursos de concreto reforzado, el diseño por carga última consiste en que los valores de las fuerzas internas obtenidas del análisis de cargas de servicio sobre la estructura incrementadas o mayoradas por unos coeficientes de carga no superen los valores de las fuerzas resistentes de los materiales afectadas por unos factores de reducción de resistencia.

Mediante el análisis estructural del modelo de la losa, se hallan los valores últimos o valores a diseñar, como son los momentos flectores, momentos torsores y fuerzas cortantes. Las fuerzas cortantes en losas macizas son significativas localmente cuando se aplican cargas concentradas o los apoyos son "puntuales". En paredes solicitadas por presiones distribuidas y con

apoyos continuos se permite despreciar su análisis; sin embargo, cuando se requiere su diseño, generalmente se procede a revisar los valores solicitados localmente con los valores que resiste la sección previamente diseñada a flexión.

De otra parte, el diseño de los momentos mayorados M_x , M_y y M_{xy} en la losa consiste en dotar a la sección del acero de refuerzo necesario para soportar los esfuerzos de tensión, siendo necesario, además, revisar los esfuerzos de compresión producidos por estos momentos. El valor de la tracción que pueda resistir el concreto generalmente se desprecia. Si el momento resistente máximo por ancho unitario en una determinada dirección es M_{ux} , se tiene como ecuación de diseño para el acero en esa dirección:

$$M_{ux} = \phi_f A_s x f_y \left(d - 0,59 A_s x \frac{f_y}{f'c} \right) \quad (22)$$

Análogamente, se observa cómo esta expresión para el diseño de losas es similar a la de diseño de vigas. Empero, no sobra recordar que en losas el diseño se realiza por ancho unitario.

Definiendo la cuantía de acero suministrado como la relación $\rho = A_s / d$, y ρ_b la cuantía balanceada, para asegurar secciones razonablemente dúctiles las referencias 4 y 5 recomiendan limitar los valores de cuantías máximas a $\rho_{max} = 0,75 \rho_b$ y $\rho_{min} = 0,50 \rho_b$, respectivamente. En todo caso, la cantidad mínima de acero (ρ_{min}) no debe ser menor que la requerida por los efectos de contracción y temperatura recomendada por la NSR-98, ni lo indicado en la referencia 3 específicamente para el caso de Tanques.

6. Análisis: los momentos principales

Los momentos principales, en los cuales el momento torsor es nulo, pueden deducirse utilizando el Círculo de Mohr, como se aprecia en la Figura 13.

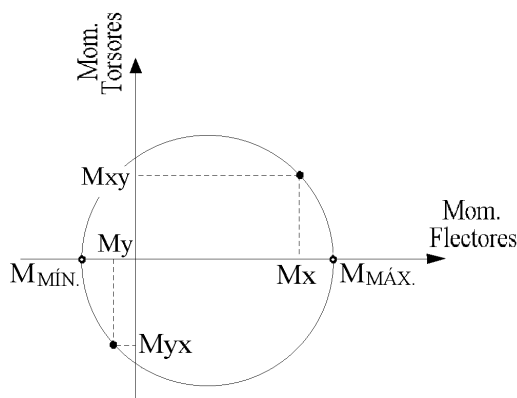


Figura 13. Construcción del Círculo de Mohr a partir de los momentos flectores y torsores en la losa.

Así, el concepto de momentos torsores debe entenderse como los momentos producto de la distorsión de los momentos principales al contemplar la losa en dirección diferente a la dirección de estos. Analizando la ecuación (18):

$$M_{xy} = -K(1 - \mu) \frac{\partial^2 \omega(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (23)$$

el término $\frac{\partial^2 \omega(x,y)}{\partial x \partial y}$ representa dicha distorsión, es decir, el cambio de la pendiente en la dirección X cuando se avanza en la dirección Y.

No obstante, no es práctico que las varillas sigan la dirección de estos momentos principales. Por esto se plantean las siguientes dos formas de obviar esta dificultad.

7. Refuerzo a 45° para momentos torsores

El método consiste en diseñar el refuerzo para los momentos flectores en las direcciones ortogonales X y Y, y separadamente proceder a diseñar el acero para los momentos torsores como sigue.

Las torsiones que actúan en dos caras adyacentes, de igual magnitud para mantener el equilibrio de los esfuerzos cortantes que las producen, tienden ambas a levantar o a deprimir la esquina común, como se indica en la Figura 14.

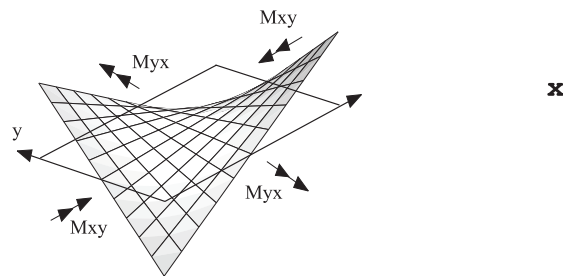


Figura 14. Momentos torsores actuantes y deformación resultante en el sistema de coordenadas original.

Una forma de sustituir el sistema mostrado es mediante el siguiente sistema equivalente, en el cual se ha girado el sistema de ejes originales 45°, que está sometido solo a momentos principales de flexión. Esto puede observarse utilizando el Círculo de Mohr (Figura 15).

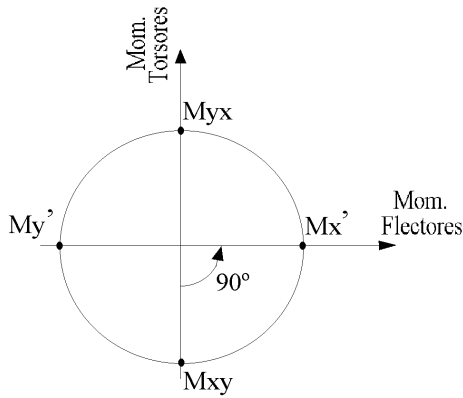


Figura 15. Construcción del Círculo de Mohr aplicado únicamente a los momentos torsores en la losa.

Se tiene ahora un sistema equivalente $X'-Y'$, rotado 45° respecto al sistema ortogonal original, conformado por momentos flectores de igual magnitud que tienden a deformar la losa en forma de silla de montar (Figura 16).

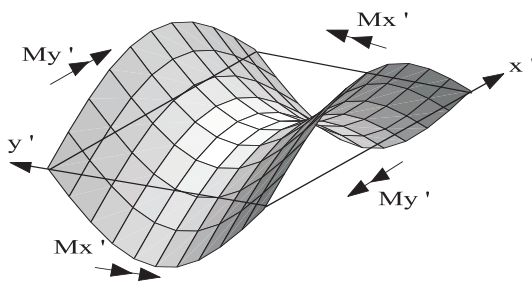


Figura 16. Sistema de coordenadas girado a 45° del original. Se observa que los momentos torsores actuantes originales se han transformado en momentos flectores.

Obsérvese que los momentos paralelos a X' traccionan las fibras superiores, mientras que los momentos paralelos a Y' hacen lo propio con las fibras inferiores. Se aclara que podría suceder a la inversa.

El diseño para estos momentos se realiza con la misma expresión utilizada para el diseño de los

momentos flectores M_x y M_y (ecuación 22). En cada punto de la losa por las dos caras será requerida igual cuantía de refuerzo, en direcciones de 45° y -45° respecto a los ejes originales (ver Figura 17).

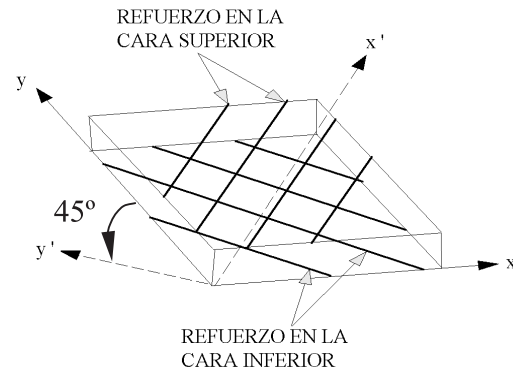


Figura 17. Refuerzo requerido por los momentos torsores en la losa (en el sistema coordenado original). Igual cuantía en las caras superior e inferior.

Así, para asumir los momentos flectores se obtienen refuerzos en las direcciones X y Y , y para los torsores un refuerzo a 45° en una cara y -45° en la otra.

8. Refuerzo total suministrado en las direcciones X y Y

El refuerzo diseñado para momentos torsores con la metodología anteriormente expuesta puede sustituirse por un refuerzo en las direcciones X y Y , que proporcione igual resistencia, y adicionárselo al refuerzo ortogonal original diseñado para momentos flectores. En la Figura 18 se explica gráficamente esta equivalencia.

Varias combinaciones de refuerzo en las direcciones X y Y satisfacen esta equivalencia. El refuerzo a 45° en una cara podría ser reemplazado únicamente por refuerzo en dirección X , por ejemplo. Obsérvese que sin distinción de que el refuerzo para torsión esté orientado a 45° o -45° , el refuerzo equivalente sobre los ejes principales X y Y es el mismo, lo

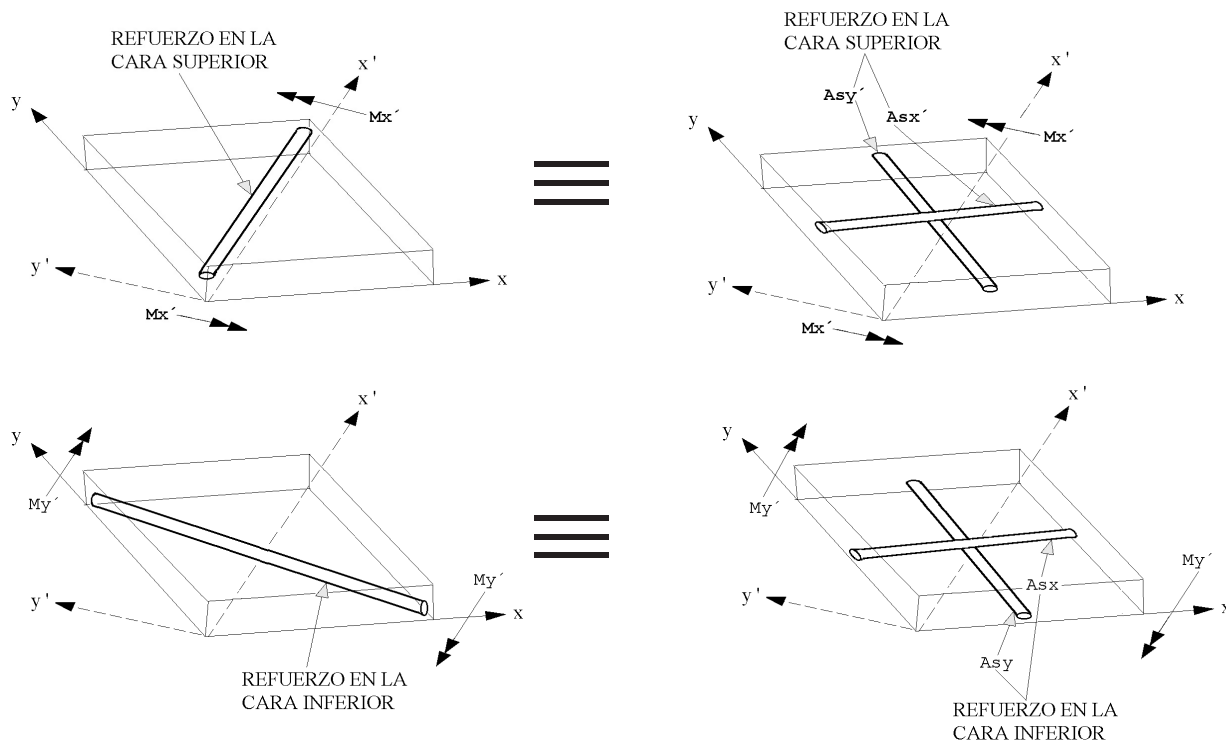


Figura 18. Refuerzos para los momentos torsores orientados a 45° y sus equivalentes paralelos a los ejes ortogonales originales X y Y .

cual es muy favorable pues no se requiere conocer el signo del momento torsor, el cual presenta una posibilidad de confusión en el método anterior.

La deducción para hallar las cuantías óptimas de acero hace necesario emplear procedimientos matemáticos o empíricos que se salen del objeto de este artículo. Se recomienda al lector interesado consultar el capítulo 5 de la segunda referencia bibliográfica de este artículo, en el cual, aplicando el criterio de fluencia de Johansen, se expone el método de análisis tradicional. Allí se proporcionan las reglas para

facilitar la aplicación del diseño, hallando los momentos últimos de diseño M_{ux} y M_{uy} sobre los ejes X y Y en la cara superior, e igualmente para la cara inferior (M_{ux}' y M_{uy}'), lo cual se sintetiza en el siguiente diagrama de flujo para facilitar el diseño por computador (ver Figuras 19 y 20).

Finalmente, deberán hallarse las áreas de refuerzo en la cara inferior de la losa Asx y Asy y en la cara superior de la losa Asx' y Asy' mediante la ecuación (22), revisando las cuantías de acero ρ_{min} y ρ_{max} .

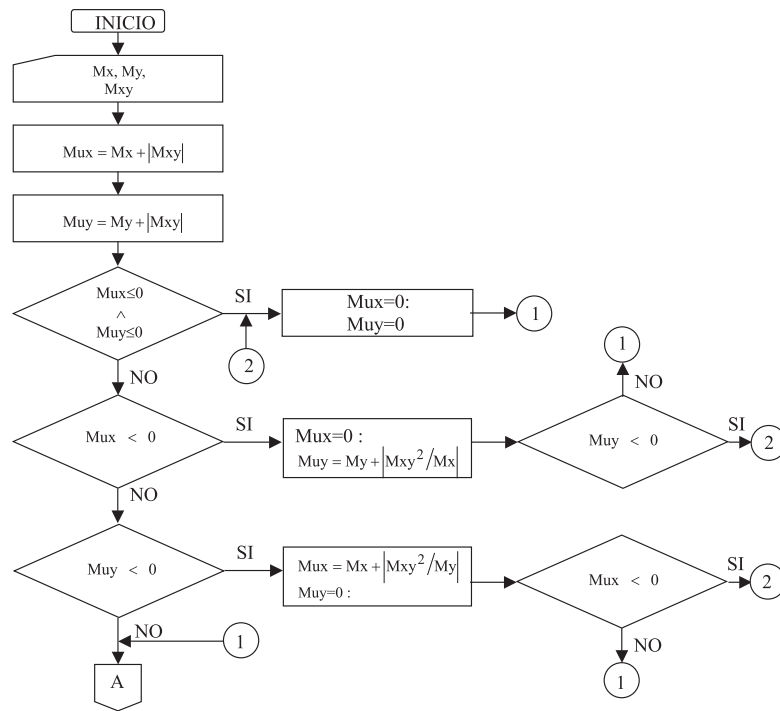


Figura 19. Diagrama de flujo para hallar los momentos de diseño de la cara inferior de la losa para colocar el refuerzo en las direcciones X y Y.

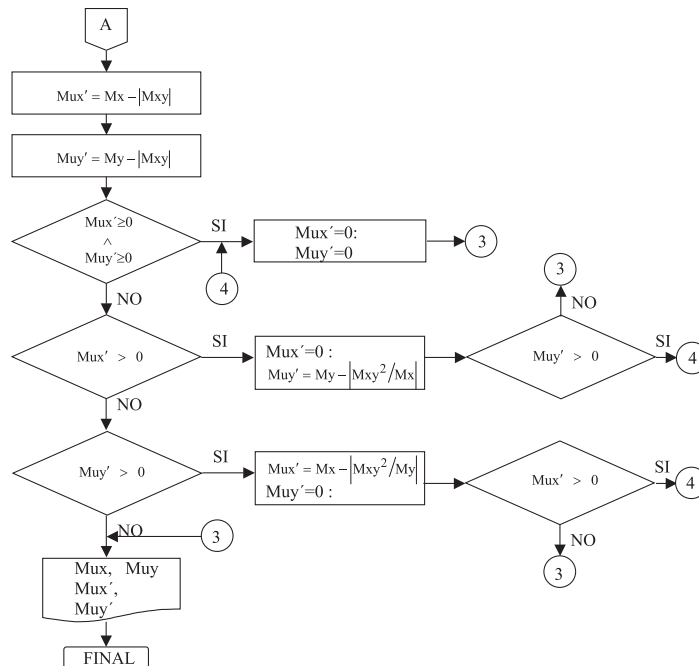


Figura 20. Diagrama de flujo para hallar los momentos de diseño de la cara superior de la losa para colocar el refuerzo en las direcciones X y Y.

9. Conclusiones y recomendaciones

Aunque el diseño a 45° es poco práctico, aquí se tomó en cuenta por su característica intuitiva y didáctica. El adicionar un refuerzo diagonal para momentos torsores al refuerzo en las direcciones principales X y Y para momentos flectores requiere de una sección con mayor espesor. El diseño a 45° puede presentar confusión en la orientación del refuerzo y requiere de mayor laboriosidad en la elaboración de planos.

El diseño con refuerzo total en ángulos rectos en apariencia es más costoso, pero se compensa con

las longitudes de desarrollo adicionales que requiere el refuerzo a 45°, la disminución de la cuantía de refuerzo por el aumento en la profundidad efectiva del refuerzo a tensión (d) y la disminución en el tiempo de armado.

Se concluye que el factor de reducción de resistencia para momentos torsores en losas debe ser el mismo que para momentos flectores en losas. La NSR-98 recomienda para estos últimos usar $\phi = 0,90$.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- COOK, Robert D.; MAKUS, David S.; y, PLESHA, Michael E. (1989) *Concepts And Applications Of Finite Element Analysis*. New York: John Wiley & Sons
- MÁRQUEZ A., Jorge Arturo (1989). *Estructuras Laminadas*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería. Publicaciones. Bogotá
- NARANJO VILARÓ, Ricardo (1991). *Guía para diseñar y construir tanques de concreto, en novenas jornadas estructurales de la ingeniería en Colombia*. Sociedad Colombiana de Ingenieros. Bogotá
- NSR-98. Normas Colombianas de Diseño y Construcción sismo resistente. Decreto 33 de 1998.
- PARK, R.; Y, GAMBLE, W. L. (1994) *Losas de Concreto Reforzado*. México: Limusa. Título original: Reinforced Concrete Slabs.
- TIMOSHENKO AND KRIEGER (1959). *Theory of plates and shells*. New York: Mc. Graw Hill