# EL PRODUCTO TENSORIAL EN CONSTRUCTOS TOPOLÓGICOS Y OTRAS CATEGORÍAS

**Carlos Ruiz Salguero***
**Jorge Adelmo Hernández Pardo****
**José Reinaldo Montañez*****

## 1. Bimorfismos

### Definición

Sean X, Y, Z objetos de una categoría C. Se dice que una función f: X x Y→Z es un **bimorfismo** si:

a. Para cada x∈X, la función $f_x$:Y→Z definida para cada y∈Y como $f_x$(y)=:f(x,y), es un morfismo en la categoría C
b. Para cada y∈ Y, la función $f_y$(x)=:f(x,y) es un morfismo en la categoría C.

### Ejemplos

a. Sea C la categoría de los conjuntos. Los objetos de esta categoría son los conjuntos, y los morfismos son las funciones entre conjuntos. Sean X, Y, Z conjuntos y espacio f: X x Y→Z una función. Claramente f es un bimorfismo.

b. Sea C la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados. Los objetos de esta categoría son pares de la forma (X, ≤), en donde X es un conjunto y "≤" es una relación de orden (reflexiva, simétrica y transitiva). Los morfismos de esta categoría son las funciones que preservan el orden en el siguiente sentido: si (X, ≤) y (Y, ≤) son conjuntos parcialmente ordenados, una función f: X→Y es un morfismo en esta categoría, si para todos x, y ∈ X tales que x ≤ y en X, se tiene que f(x) ≤ f(y) en Y.

Ahora bien: si X, Y, Z son conjuntos parcialmente ordenados y f: X x Y→Z es una función, entonces f: X x Y→Z es un morfismo si y solamente si f: X x Y→Z es un bimorfismo, lo cual puede probarse fácilmente. Es de notar que si (X, ≤") y (Y, ≤") son objetos de C,

* Doctor en Matemáticas, Director Grupo de Investigación «Vialtopo», Universidad Nacional de Colombia
** Matemático, docente adscrito a la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas
*** Ms. en Matemáticas Universidad Nacional de Colombia, Grupo Vialtopo

entonces (XxY,≤) es un objeto de C, en donde "≤" está definida por $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \in$ X x Y siempre que $x_1 \leq' x_2$ y $y_1 \leq'' y_2$ con $(x_2, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ sean elementos de X xY.

c) Sea C la categoría de los espacios vectoriales sobre un campo K. Los objetos de esta categoría son los espacios vectoriales sobre K y los morfismos son las transformaciones lineales entre los espacios vectoriales sobre K.

Sean X,Y, Z espacios vectoriales sobre K. Sea f: X xY→Z una función. Entonces, f es un bimorfismo si para cada x∈X la función $f_x$:Y→Z es morfismo, lo cual significa en esta categoría, que para todos $y_1$, $y_2 \in$ Y y todo k∈K se tenga que: $f_x(y_1+y_2) = f(x,y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2) = f_x(Y_1)+f_x(y_2)$, y $f_x(ky_1)=f(x,ky_1)=kf(x,y_1) = kf_x(y_1)$.

Ahora se piden condiciones análogas para cada y∈Y en la función $f_y$: X→Z. Entonces, f: X x Y→Z es un bimorfismo si y solamente si f es una función bilineal, es decir, si f es lineal en cada una de las variables.

En particular, en la categoría de los espacios vectoriales sobre el conjunto de los números reales R, cada matriz A de orden n x m determina un bimorfismo f: $R^n$ x $R^m$→R definido por f(A)=XAY, en donde X yY son vectores de $R^n$ y $R^m$, respectivamente. También en esta categoría un producto interior sobre R determina un biformismo.

d) Sea C la categoría de los espacios topológicos. Los objetos de esta categoría son los espacios topológicos, y los morfismos son las funciones continuas. En ella los bimorfismos son llamados funciones bicontinuas.

Consideremos la categoría de los espacios topológicos. Sea X, Y y Z espacios topológicos. Si f:X *Y→Z es una función continua, entonces *f: X *Y→Z* es un biformismo. Sin embargo, el recíproco de esa proposición no es cierto, como se ilustra a continuación.

Sea R el conjunto de los números reales dotados de su topología usual. La función *f: R * R*→R definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & si(x, y) \neq (0,0) \\ 0, & si(x, y) = (0,0) \end{cases}$$

es un biformismo y f no es continua.

## 2. Producto Tensorial

### · Definición

Sean X yY objetos de una categoría C. Se dice que (Z, f), en donde Z es un objeto de C y f: X xY → Z un bimorfismo, es el **producto tensorial** de X y Y si para toda pareja (W, g), donde W es un objeto de C y g: X xY →W un bimorfismo, existe un único morfismo $\phi$: Z à W tal que $\phi$ o f=g.

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ Z \arrow[rr, "\phi"'] & & W \end{tikzcd}$$

El objeto Z es único salvo isomorfismos y se acostumbra escribir X ⊗ Y.

### • Ejemplos

a) En la categoría de los conjuntos el producto tensorial de dos conjuntos X yY es la pareja (X xY, i), en donde X xY es el producto cartesiano de X yY, e i: X xY → X xY es la función identidad

b) En la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados el producto tensorial de dos objetos X yY es la pareja (X ⊗ Y, i), donde X ⊗ Y es el producto cartesiano de X yY, junto con la estructura de orden parcial definida por: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, si y solo si, $x_1 \leq x_2$, y, $y_1 \leq y_2$, e, i: X xY → X xY es la función identidad, la cual es un bimorfismo.

En efecto, para cada x∈X, y para todo par de elementos $y_1$, $y_2 \in$ Y se tiene que $(x,y_1) \leq (x,y_2)$, lo cual implica que $i_x(y_1) \leq i_x(y_2)$, y por lo tanto, $i_x$ es un morfismo. Análogamente se prueba que para cada y∈Y la función $i_y$ es un morfismo. Se concluye entonces que: i: X xY →X xY es un bimorfismo. Ahora, si g: X xY→W es un bimorfis mo, la función $\phi$: X xY $\rightarrow$ W definida por $\phi(x,y)=:g(x,y)$ $\forall$ $(x,y)\in X \times Y$ es un morfismo en esta categoría, y además es la única que verifica la igualdad $\phi$ oi=g, puesto que i es un epimorfismo en esta categoría.

c) Construcción del producto tensorial en la categoría de los grupos
   1) Sean M y N grupos
   2) Sea L(M x N) el grupo libre generado por el conjunto M x N. $L(M \times N)=\{(m_1,n_1)^{r1}.(m_2,n_2)^{r2}...(m_k,n_k)^{rk} \mid m_i\in M,\ n_i\in N$ para $1 \leq i \leq n$ y $r_i$ es un número entero$\}$.

Si $(m, n)\in L(N \times N)$, el elemento $(m,n)^0$ se denota como 1 y corresponde al elemento identidad del grupo. Ahora, la siguiente es la forma como se define la operación que da estructura de grupo a L(Mx N):

Sean: $a = (m_1,n_1)^{r1}.(m_2,n_2)^{r2}...(m_k,n_k)^{rk} \in L(M \times N)$ y
$b = (x_1,y_1)^{t1}.(x_2,y_2)^{t2}...(y_s,y_s)^{ts}\in L(M \times N)$,entonces
$a. b := (m_1, n_1)^{r1}.(m_2,n_2)^{r2} \ldots (m_k,n_k)^{rk}. (x_1,y_1)^{t1} .(x_2,y_2)^{t2}....(y_s,y_s)^{ts}$

3) Determinemos las funciones:
a. $\alpha$: $M^2 \times N \rightarrow L(M \times N)$, definida por:
   $\alpha (m_1,m_2,n)=:(m_1.m_2,n).(m_2,n)^{-1}.(m_1,n)^{-1}$ para todos $m_1, m_2\in M$ y $n\in N$.
b. $\beta$: $M \times N^2 \rightarrow L(M \times N)$
   $\beta (m,n_1,n_2)=:(m, n_1.n_2).(m,n_2)^{-1}.(m,n_1)^{-1}$ para todos $m\in M$, $n_1,n_2\in N$.

4) Sea K la intersección de todos los subgrupos normales de L(M x N) que contiene al conjunto $\alpha (M^2 \times N) \cup \beta (M \times N^2)$.

5) Se determina entonces el grupo cociente L(M x N)/K, cuyos elementos notaremos en la forma $\bar{a}$, siempre que « a » sea elemento de L(M x N)

6) Determinemos las funciones:
a. i: M x N $\rightarrow$L(M x N), definida por: i (m, n) : = (m, n) para todos $(m,n)\in M \times N$.
b. j: L(M x N) $\rightarrow$L(M x N)/K, definida por: j (a): = $\bar{a}$ para todo $a\in L(M \times N)$

7) Veamos que la pareja (L(M x N)/ K,joi) es el producto tensorial de MxN.

a) La aplicación joi: M x N à L(M x N)/K es un bimorfismo, como se verá a continuación.

Sea $n\in N$, veamos que la función $(joi)_n : M \rightarrow L(M \times N)/K$ es un homomorfismo de grupos. Sean $m_1,m_2\in M$, entonces:

$(m_1.m_2,n)(m_2,n)^{-1}(m_1,n)^{-1}\in$ k
porque $\alpha(M^2 \times N)\in K$ por lo tanto
$\overline{(m_1.m_2,n)}\,\overline{(m_2,n)}^{-1}\overline{(m_1,n)}^{-1} = \bar{1}$

lo cual implica que:

$\overline{(m_1.m_2,n)} = \overline{(m_2,n)}\,\overline{(m_1,n)}$

y por lo tanto $(joi)_n(m_1.m_2)=(joi)_n(m_1).(joi)_n(m_2)$, de lo cual se concluye que $(joi)_n$ es un homomorfismo de grupos.

En la misma forma se prueba que para cada $m\in N$, la función $(joi)_m$: N $\rightarrow$ L(MxN)/K es un homomorfismo de grupos. Se ha demostrado que (joi) es un bimorfismo.

b) Sea (G,.) un grupo y g: M x N $\rightarrow$ G un bimorfismo. La aplicación h:L(MxN)$\rightarrow$G, definida por: $h[m_1,n_1]^{r1}.(m_2,n_2)^{r2}...(m_k,n_k)^{rk}]= g(m_1,n_1).g(m_2,n_2)... g(m_k,n_k)$, es una función tal que hoi=g, puesto que para todo $(m,n)\in M \times N$, homomorfismo de grupos, como puede comprobarse fácilmente. Se determina entonces la aplicación: $\phi$: L(M x N)/K $\rightarrow$ G definida por $\phi(\bar{a})=:h(a)$ para todo $\bar{a} \in L(M \times N)/K$.

Para demostrar que f está bien definida, obsérvese primero que la función h se anula en los generadores del grupo K.
Sea $(m_1.m_2,n).(m_2,n)^{-1}.(m_1,n)^{-1}\in K$
entonces $h[(m_1.m_2,n).(m_2,n)^{-1}(m_1,n)^{-1}]$
$=g(m_1.m_2,n).g(m_2,n)^{-1}. (m_1,n)^{-1}$
$=g(m_1.m_2,n).(g(m_2,n))^{-1}.(g(m_1,n))^{-1}$
$=g_n(m_1.m_2).(g_n(m_2))^{-1}.(g_n(m_1))$
$=g_n(m_1.m_2).g_n(m_2^{-1}).g_n(m_1^{-1})=g_n(m_1.m_2.m_2^{-1}.m_1^{-1})$
$=g_n(1)=1$

Ahora, sean $\bar{a},\bar{b}\in L(M \times N)/K$, tales que $\bar{a} =\bar{b}$, entonces $a-b\in K$, por lo tanto $h(a-b)=1$, lo cual implica que h(a)=h(b) y así $\phi$ (a)=$\phi$ (b); de lo anterior se concluye que f está bien definida.

La función $\phi$ es además un homomorfismo de grupos puesto que h lo es. De otra parte, dado (m,n)$\in$ M x N, se tiene que $\phi o(joi)=g$. El homomorfismo $\phi$ es el único que verifica esta última igualdad puesto que joi es epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & M \times N \arrow[dl, "i"'] \arrow[ddr, "g"] & \\
L(M \times N) \arrow[d, "j"'] \arrow[drr] & & \\
L(M \times N)/K \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & G
\end{tikzcd}$$

c) Construcción del producto tensorial en la categoría de los espacios topológicos:

1) Sean X y Y espacios topológicos con topologías $\alpha$, $\beta$ respectivamente

2) Sea X x Y el producto cartesiano de los conjuntos X y Y. Determinamos una topología $\lambda$ para X x Y así: Sea $U \subseteq$ X x Y, decimos que U $\in$ $\lambda$, si y solamente si, para cada x $\in$ X el conjunto $\{y \in Y \mid (x,y) \in U\} \in \beta$ y para cada caso y$\in$ Y, el conjunto $\{x \in X \mid (x,y) \in U\} \in \alpha$.

3) Sea X$\otimes$Y el conjunto topológico que determina X x Y con la topología $\lambda$. La pareja (X $\otimes$Y,i) es el producto tensorial de X y Y, en donde i: X x Y $\rightarrow$ X x Y es la función identidad. En efecto sea x$\in$ X, debemos demostrar que $f_x$:Y $\rightarrow$ X x Y es continua, de la siguiente forma:

Sea U$\subset$ X x Y, U$\in\lambda$. Entonces $i_x^{-1}(U)=\{y \in Y \mid i_x(y) \in U\} =\{y \in Y \mid i(x, y) \in U\} =\{y \in Y \mid (x, y) \in U\}$. Luego $i_x^{-1}(u) \in \beta$ por construcción de la topología $\lambda$;de lo cual se sigue que $i_x$ es continua; de la misma forma se prueba que si y$\in$ Y la función $i_y$: X $\rightarrow$ X x Y es continua.

Por lo tanto i: X x Y $\rightarrow$ X x Y es un bimorfismo. Ahora, sea W un espacio topológico con conjunto subyacente W y topología $\tau$.

Sea g: X x Y $\rightarrow$ W un bimorfismo. Sea $\phi$:X$\otimes$Y $\rightarrow$ W la función definida por $\phi$(x, y):=g(x, y)

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\
X \times Y \arrow[rr, "\phi=g"'] & & W
\end{tikzcd}$$

La función $\phi$:X x Y $\rightarrow$ W es continua. Sea V$\in\tau$; entonces, como g es un bimorfismo, para cada x$\in$ X, $g_x^{-1}(V) \in \beta$ y para cada y$\in$ Y, $g_y^{-1}(V) \in \alpha$,. Por lo tanto $g^{-1}(V) \in \lambda$, luego $\phi^{-1}(V) \in \lambda$. La función $\phi$=g es la única que verifica la igualdad $\phi oi=g$, puesto que i es epimorfismo.

e) Observaciones respecto al producto tensorial en la categoría de los espacios topológicos:

1) Los espacios topológicos X =(X,$\alpha$) y Y:(Y,$\beta$) son discretos, si y solamente si, el espacio topológico X $\otimes$ Y =(X x Y,$\lambda$) es discreto. La demostración es la siguiente:

Supóngase que X y Y son espacios discretos.
Sea U $\subset$ X x Y; entonces, para cada x$\in$ X el conjunto $\{y \in Y \mid (x,y) \in U\} \in \beta$ porque Y es discreto. Análogamente, para cada y$\in$ Y el conjunto $\{x \in X \mid (x,y) \in U\} \in \alpha$ porque X es discreto. Por lo tanto U$\in\lambda$, de lo cual se sigue que X $\otimes$ Y es un espacio discreto.

Ahora, supongamos que X $\otimes$ Y es un espacio discreto y veamos que X es también un espacio discreto. Sea A$\subset$X: como Y$\neq\phi$ existe $y_0 \in$ Y y A x$\{y_0\} \subset$X x Y, pero, por hipótesis, A x $\{y_0\} \in \lambda$ porque X $\otimes$ Y es un espacio discreto, entonces, por definición de la topología $\lambda$, se tiene que dado $y_0 \in$ Y, el conjunto $\{x \in X \mid (x,y_0) \in A\{y_0\}\} = A \in \alpha$, por lo tanto X es un espacio discreto. De igual manera se prueba que Y es un espacio discreto.

2) Los espacios topológicos X =(x,$\alpha$) y y=(y,$\beta$) son Hausdorff, si y solamente si, el espacio topológico X $\otimes$ Y =(X x Y, $\lambda$) es Hausdorff. La siguiente es la demostración correspondiente:

Supongamos que X y Y son espacios Hausdorff y veamos que X $\otimes$ Y es un espacio de Hausdorff. Sean $(x_0,y_0)$ y $(x_1,y_1)$ elementos de X x Y. Entonces, existen conjuntos abiertos $A_0$ y $A_1$ en $\alpha$, tales que $xo \in A_0$, $x_1 \in A_1$ y $A_0 \cap A_1 = \phi$; también existen conjuntos abiertos $B_0$ y $B_1$ en $\beta$ tales que $y_0 \in B_0$, $y_1 \in B_1$ y $B_0 \cap B_1 = \phi$. Entonces, $(x_0,y_0) \in A_0 \times B_0$ y $(x_1,y_1) \in A_1 \times B_1$ y claramente $(A_0 \times B_0) \cap (A_1 \times B_1) = \phi$. Sólo resta ver que $A_0 x B_0$ y $A_1 x B_1$ son abiertos en $\lambda$; compruébese primero que $A_0 x B_0 \in \lambda$. De la misma forma se prueba que $A_1 \times B_1 \in \lambda$. Sea $x \in X$, entonces $x \in A_o$ o $x \notin A_o$; si $x \notin A_o$, entonces $\{y \in Y/(x, y) \in Ao \times Bo\} = \phi$, el cual es abierto en $\beta$; ahora, si $x \in A_o$, entonces $\{y \in Y/(x, y) \in A_o \times B_o\} = B_o$ y $B_o \in \beta$; así que $A_o \times B_o$ es abierto en $\lambda$.

Ahora supongamos que $X \otimes Y$ es un espacio de Hausdorff y veamos que X es un espacio de Hausdorff.

Sean $x_0$ y $x_1$ elementos de X. Como $Y \neq \phi$, sea $y_0 \in Y$. Entonces existen abiertos U y V en $\lambda$ tales que $U \cap V = \phi$ y $(x_0,y_0) \in U$ y $(x_1, y_0) \in V$. Por definición de la topología de $\lambda$, se tiene que dado $y_0 \in Y$ el conjunto $A_0 = \{x \in X \mid (x,y_0) \in U\} \in \alpha$ y el conjunto $A_1 = \{x \in X \mid (x, y_0) \in V\} \in \alpha$. Ahora, $x_0 \in A_0$ y $x_1 \in A_1$ y claramente $A_0 \cap A_1 = \phi$ pues si existiera $z \in A_0 \cap A_1 = \phi$ entonces $(z,y_0) \in U \cap V$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es un espacio de Hausdorff. De igual forma se prueba que Y es un espacio de Hausdorff.

3) Los espacios topológicos $X = (x,\alpha)$ y $Y = (y,\beta)$ son conexos, si y solamente si el espacio topológico $X \otimes Y = (X \times Y, \lambda)$ es conexo, como se demuestra a continuación:

Supongamos que X y Y son espacios conexos y véase que $X \otimes Y$ es un espacio conexo. Es suficiente demostrar que para dos cualesquiera puntos $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ de $X \times Y$ existe un subespacio conexo que los contiene.

Las funciones, $i_{y2}: X \rightarrow X \times Y$ definida por $i_{y2}(x) = (x,y_2)$ para cada $x \in X$, y $i_{x1}: Y \rightarrow X \times Y$ definida por $i_{x1}(y) = (x_1,y)$ para cada $y \in Y$, son continuas, porque $i: X \times Y \rightarrow X \times Y$ es un bimorfismo. Entonces sus imágenes $i_{y2}(X) = X x \{y_2\}$ y $i_{x1}(Y) = \{x_1\} x Y$ son conexos. Como $(X \times \{y_2\}) \cap (\{x_1\} \times Y) = \{(x_1,y_2)\}$ se tiene que $(X x \{y_2\}) \cup (\{x_1\} x Y)$ es conexo y contiene a $(x_1,y_1)$ y a $(x_2,y_2)$ con lo cual $X \otimes Y$ es conexo.

Ahora, supongamos que $X \otimes Y$ es conexo y veamos que X es conexo. La función $f: X x Y \rightarrow X$ definida por $f(x,y)=x$ es continua. En efecto, sea $A \in \alpha$; entonces $f^{-1}(A) = A x Y$ y para cada $x \in X$, $\{y \in Y \mid (x, y) \in A x Y\} = y \in \beta$ y para $y \in Y$, $\{x \in X/(x, y) \in A x Y\} = A \in \alpha$, de lo cual se sigue que $A x Y \in \lambda$. Entonces $f(X x Y) = X$ es conexo. De igual manera se prueba que Y es un espacio conexo.

## 3. El Producto Tensorial en Constructos Topológicos

Intuitivamente puede decirse que un **constructo** es una categoría cuyos objetos son conjuntos estructurados, y cuyos morfismos son funciones que respetan las estructuras.

- **Definición**

Sea $F: C \rightarrow$ Conj. un funtor de una categoría C en la categoría de los conjuntos. Si X es un conjunto, la colección de los objetos X de C tales que $F(X) = X$ se llaman estructuras sobre X. **Si X es una estructura sobre X notaremos** $X = (X, \delta)$ y diremos que tiene como conjunto subyacente a X y como estructura a $\delta$.

Si $f: (X, d) \rightarrow (Y, \alpha)$ es un morfismo en C, entonces F(f) es una función de X en Y. A los morfismo de C se les llama funciones admisibles. Es de anotar además que la categoría C es llamada un **constructo.**

Un constructo C es llamado **constructo topológico**, si y solamente si satisface las siguientes condiciones:

1) Existencia de estructuras iniciales. Para cada conjunto X y cada familia $\{X_i,\xi_i\} i \in I$ de objetos de C indizada por una clase I y una familia $(f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ de funciones indizadas por I, existe una única estructura $\xi$ sobre X, la cual es inicial con respecto a $(X, f_i, (X_i, \xi), I)$, es decir, tal que para cada (Y, n) objeto de C de una función $g: (Y, n) \rightarrow (X, \xi)$ es un morfismo, si y solo si, para cada $i \in I$, $f_i o g: (Y, n) \rightarrow (X, \xi_i)$ es un morfismo en C.

2) Para cada conjunto X, la clase de las C –estructuras sobre X, es un conjunto.

- **Proposición**

Para un constructo topológico C, la condición (1) de la definición anterior es equivalente a la siguiente condición [Preuss]:

Para un conjunto X y una familia $\{X_i, \xi i\} i \in I$ de C –objetos indizados por una clase I y una familia $(f_i: X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ de funciones indizadas por I, existe una única C –estructura $\xi$ sobre X, la cual es final con respecto a $\{(X_i, \xi_i), f_i, X, I\}$. Es decir que para cada C –objeto (Y, n ), una función $g:(X, \xi) \rightarrow (Y, n)$ es un C –morfismo, si y solo si, para cada $I \in I$, $g \circ f_i: (X_i, \xi_i) \rightarrow (Y, n)$ es un C -morfismo.

- **Construcción del producto tensorial en la categoría de los espacios topológicos**

Es de anotar inicialmente que la categoría de los espacios topológicos es un constructo topológico. Ahora, sean X e Y espacios topológicos con topologías $\alpha$ y $\beta$ respectivamente. De acuerdo con la proposición anterior, el producto tensorial de X e Y está dado por una pareja $(X \otimes Y, i)$, donde $X \otimes Y$ es un espacio topológico con conjunto subyacente X e Y y una topología $\tau$ que vamos a determinar.

Sabemos que la función identidad $i: X \times Y \rightarrow X \times Y$ debe ser un biformismo, es decir para cada $x \in X$ la función $i_x: Y \rightarrow X \times Y$ debe ser continua y para cada $y \in Y$, la función $i_y: X \rightarrow Y$ debe ser continua, siendo X x Y el producto cartesiano de los conjuntos X y Y. Entonces la topología $\tau$ se define de la siguiente manera "$U \in \tau$ si y solamente si, para cada $x \in X$, $i_x^{-1}(U) = \{y / (x, y) \in U\} \in \alpha$ y para cada $y \in Y$, $i^{-1}_y(U) = \{x / (x, y) \in U\} \in \beta$.

Entonces la pareja $\{X \otimes Y, i) = [(X \times Y, \tau), i]$ es el producto tensorial de los espacios $X = (X, \alpha)$ y $Y = (Y, \beta)$, siendo $i: X \times Y \rightarrow X \times Y$ la función identidad de X x Y.

- **Proposición:** *todo constructo topológico tiene productos tensoriales*. La siguiente es la demostración correspondiente:

Sea C un constructo topológico. Sea $(X, \xi)$ y $(Y, \alpha)$ objetos de C. Consideremos la función identidad $i: X \times Y \rightarrow X \times Y$ y la familia de funciones:

$\{i_x: Y \rightarrow X \times Y / i_x(y) = (x, y)\}_{x \in X} \cup \{i_y: X \rightarrow X \times Y / i_y(x) =: (x, y)\}_{y \in Y}$

Por la proposición anterior existe la estructura final para la familia dada. Entonces existe un objeto $(Z, \beta)$ en C con $Z = X \times Y$ y una familia de morfismos:

$$\{i_x: (Y, \alpha) \rightarrow (X \times Y), \beta)\}_{x \in X} \cup \{i_y: (X, \xi) \rightarrow (X x Y, \beta)\}_{y \in Y}.$$

La función $i: X \times Y \rightarrow X \times Y$ es un biformismo y la pareja $(X \times Y, i)$ es el producto tensorial de $(X, \xi)$ y $(Y, \alpha)$ como se prueba a continuación.

En efecto, para ver los detalles que faltan, supongamos que $(W, \sigma)$ es un objeto de C y $g: X x Y \rightarrow W$ es un biformismo. Entonces, se determina una familia de morfismos:
$\{g_x: (Y, \alpha) \rightarrow (W, \sigma)\}_{x \in X} \cup \{g_y: (X, \xi) \rightarrow (W, \alpha)\}_{y \in Y}$.

Por definición de estructura final, existe un morfismo $h:(X x Y, \beta) \rightarrow (E, \sigma)$. Entonces $(X \times Y, \beta)$ junto con la función inclusión i es el producto tensorial de $(X, \xi)$ y $(Y, \alpha)$ y por lo tanto C es una categoría con productos tensoriales.

## *REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS*


- ***ADÁMCK, J.*** Theory of Mathematical Structures. Reidel, Dordrech – Boston – Lancaster, 1983.
- ***CAICEDO, F.*** Teoría de Grupos. Universidad Nacional de Colombia.
- ***PREUSS, G.*** Theory of Topological Structures. Reidel, Dordrech – Boston – Lancaster, 1988.