PROCEDIMIENTO PARA GRAFICAR LA ECUACIÓN CUADRÁTICA GENERAL

Harold Vacca González*
Jorge Adelmo Hernández**

La presente es la traducción del artículo escrito por el profesor Duane W. Temple, aparecido en la revista Mathematical Teacher de 1988. Por su contenido didáctico se considera de interés para los lectores, pues demuestra la utilidad de recursos intuitivos como traslaciones y rotaciones, transformaciones que se presentan continuamente en los fenómenos de Ingeniería que se modelan matemáticamente y que, apropiadamente trabajadas, cimentan la representación gráfica, duradera y estimulante, frente a otras representaciones como la simbólica por ejemplo. Con base en este principio se hace un novedoso tratamiento de la ecuación general de segundo grado y de las cónicas que ella produce. A partir de la construcción de un círculo (sencillo y muy conocido) se determina el tipo de cónica y sus ejes, ahorrando trabajo en su graficación. Valga este pretexto para llamar la atención acerca de la motivación geométrica que deben tener los conceptos impartidos en las asignaturas del área de matemáticas.

La ecuación cuadrática general en dos variables:

$$A \cdot X^2 + 2 \cdot B \cdot X \cdot Y + C \cdot y^2 + 2 \cdot D \cdot X + 2E \cdot Y + F = 0 \quad (1)$$

Representa una elipse, una hipérbola o una parábola (o posiblemente un degeneramiento de alguna de las cónicas).

La dificultad que presenta la ecuación (1) radica en la localización de los ejes **X** e **Y**.

Con una apropiada traslación y rotación se encuentra un sistema de coordenadas **X**', **Y**', en los cuales la ecuación general toma una de las formas Standard.

$$\begin{aligned}&\frac{X'^2}{a^2}+\frac{Y'^2}{b^2}=1\\&\frac{X'^2}{a^2}-\frac{Y'^2}{b^2}=1 \qquad (2)\\&X'^2=2\cdot p\cdot Y'\end{aligned}$$

Desafortunadamente, existen dificultades en el manejo de transformaciones algebraicas y trigonométricas necesarias para convertir una ecuación de la forma (1) en una ecuación de la forma (2).

* Licenciado en Matemáticas y Especialista en Ingeniería de Software Universidad Distrital F.J.C., profesor Universidad Distrital F.J.C., adscrito a la Facultad Tecnológica
** Matemático y Especialista en Matemática Avanzada Universidad Nacional de Colombia, profesor Universidad Distrital F.J.C. adscrito a la Facultad Tecnológica

El propósito de este artículo es mostrar cómo estas largas y tediosas transformaciones pueden remplazarse por simples procedimientos geométricos, los cuales determinan el tipo de cónica y sus ejes, y permiten hacer rápidamente un gráfico.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que **$0 \leq A$**. En caso contrario, la ecuación (1) se multiplica por -1.

Traslación de Ejes

Primero, eliminaremos (si es posible) los términos de grado uno en la ecuación (1); lo cual da significado a la traslación:

$$\begin{aligned} X &= X' + h \\ Y &= Y' + k \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (1) tenemos:

$$A \cdot X'^2 + 2 \cdot B \cdot X' \cdot Y' + C \cdot Y'^2 + 2 \cdot (A \cdot h + B \cdot k + D) \cdot X' + 2 \cdot (B \cdot h + C \cdot k + E) \cdot Y' + F' = 0$$

en donde

$$\begin{aligned} F' = C \cdot k^2 + 2 \cdot B \cdot h \cdot k + 2 \cdot E \cdot k + \\ A \cdot h^2 + 2 \cdot D \cdot h + F \end{aligned} \quad (4)$$

los términos en **X'** e **Y'** pueden eliminarse si escogemos **h**, **k** tales que:

$$A \cdot h + B \cdot k + D = 0$$
$$B \cdot h + C \cdot k + E = 0$$

El origen del sistema **X'**, **Y'**, es el punto **(h, k)** de **X**, **Y**.

Si se desea saber qué son h, k, geométricamente, podríamos graficar las rectas $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$:

$$\begin{aligned} L_1 &= A \cdot X + B \cdot Y + D = 0 \\ L_2 &= B \cdot X + C \cdot Y + E = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Con pendientes

$$m1 = -\frac{A}{B} \quad \text{y} \quad m2 = -\frac{B}{C}$$

Notemos que **m1 = m2,** si y sólo si: $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ es decir, $B^2 - AC = 0$ (cuando (1) sea una parábola)

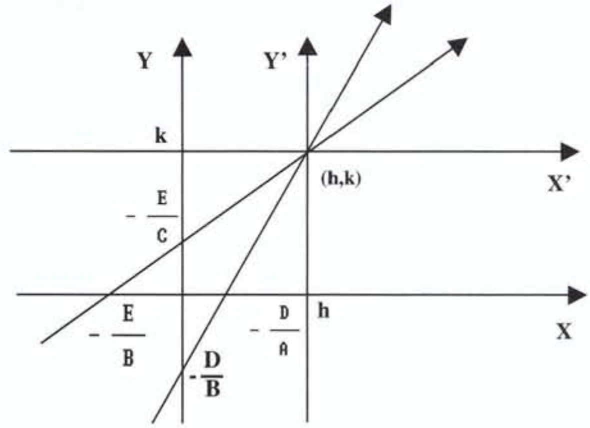


Figura 1

Si en (5) solucionamos la ecuación, obtenemos:

$$h = \frac{B \cdot E - C \cdot D}{A \cdot C - B^2}, \quad k = \frac{B \cdot D - A \cdot E}{A \cdot C - B^2} \quad (6)$$

y la nueva ecuación (1) toma la forma en **X'**, **Y'**

$$F' + A \cdot X'^2 + 2 \cdot B \cdot X' \cdot Y' + C \cdot Y'^2 = 0 \quad (6)$$

Rotacion de Ejes

En esta parte supondremos que **$B \neq 0$**, de otra manera, no sería necesaria la rotación. Veamos una construcción geométrica sencilla, la clave para este procedimiento es la construcción de cierto círculo (Γ) que depende de los coeficientes **A, B** y **C** de la ecuación general.

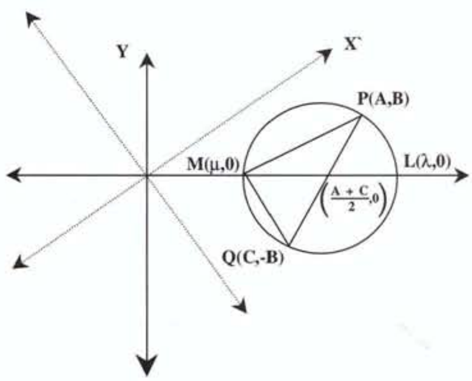


Figura 2

Para la construcción de Γ localizamos el punto **P(A,B)** y el punto **Q(C,-B)** y trazamos el círculo cuyo diámetro es **PQ**. Como **B ≠ 0, P ≠ Q**, siempre existirá tal círculo.

Además está sobre el eje **X** y tiene dos (2) puntos de intersección con éste: **M(μ, 0)** y **L(λ, 0).**

Como μ < λ y λ > **0,** el radio de Γ es:

$$\rho = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left((A-C)^2 + 4\cdot B^2\right)} \quad (8)$$

Como el centro de Γ es de coordenadas

$$\left(\frac{A+C}{2}, 0\right)$$

$$\lambda = \rho + \frac{A+C}{2} \qquad \mu = \frac{A+C}{2} - \rho \quad (9)$$

Luego, $\lambda\cdot\mu = \dfrac{(A+C)^2}{4} - \rho^2$ muestra la parábola

$AC - B^2 = 0$, si y sólo si $\mu = 0$

Si $\mu > 0$ se tendrá el caso de la Elipse.

Si $\mu < 0$ se tendrá el caso de la Hipérbola.

El círculo Γ nos ayuda a identificar los tres casos.

Ahora podremos ver que las direcciones de los segmentos **MP** y **MQ** definen las direcciones apropiadamente de la rotación de los ejes **X'** e **Y'**, como puede verse en la Figura 2.

Denotando por θ el ángulo de rotación, la transformación de **X** e **Y** a **X'** e **Y'** es:

$$\begin{aligned} X' &= X\cdot Cos(\theta) + Y\cdot Sin(\theta) \\ Y' &= -X\cdot Sin(\theta) + Y\cdot Cos(\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

o sea

$$\begin{aligned} X &= Cos(\theta)\cdot X' - Sin(\theta)\cdot Y' \\ Y &= X'\cdot Sin(\theta) + Y'\cdot Cos(\theta) \end{aligned} \quad (11)$$

Empleando las identidades para los ángulos dobles:

$$Sin(\theta)\cdot Cos(\theta) = \frac{1}{2}\cdot Sin(2\cdot\theta)$$

$$Cos(\theta)^2 = \frac{1+Cos(2\cdot\theta)}{2}$$

$$Sin(\theta)^2 = \frac{1}{2}\cdot(1-Cos(2\cdot\theta))$$

Se sigue que:

$$A'\cdot X'^2 + 2\cdot B'\cdot X'\cdot Y' + C'\cdot Y'^2 = A\cdot X^2 + 2\cdot B\cdot X\cdot Y + C\cdot Y^2$$

$$B' = B\cdot Cos(2\cdot\theta) - \frac{A-C}{2}\cdot Sin(2\cdot\theta)$$

$$C' = \frac{A+C}{2} - \frac{A-C}{2}\cdot Cos(2\cdot\theta) - B\cdot Sin(2\cdot\theta)$$

$$C' = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cdot Cos(2\cdot\theta) + B\cdot Sin(2\cdot\theta)$$

Para identificar los coeficientes **A , B , C** geométricamente, haremos uso de la siguiente Figura:

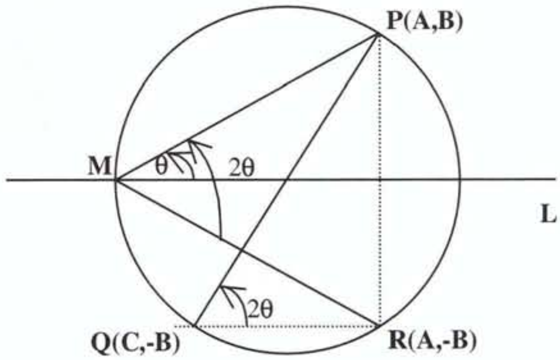


Figura 3

Vemos que ∠ **PMR** = 2∠ **PML** = 2θ Más aún ∠ **PQR** = ∠ **PMR** pues los dos ángulos determinan el mismo arco **PR** de Γ, luego

$$\text{TAN}(\angle\text{PQR}) = \frac{P\cdot R}{Q\cdot R}$$

Tendremos: $$Tan(2\cdot\theta) = \frac{2\cdot B}{A-C} \quad (14)$$

De aquí se sigue que $B'=0$, el término en $X'Y'$ quedará eliminado en (12).

También, de la Figura 3 vemos que:

$$Q \cdot R = A - C \quad \text{y} \quad P \cdot R = 2 \cdot B$$

y del diámetro (**PQ** = 2ρ) tenemos que:

$$(A-C) \cdot Cos(2 \cdot \theta) + 2 \cdot B \cdot Sin(2 \cdot \theta) = 2 \cdot \rho$$

y de las ecuaciones (9) y (13) concluimos que:

$$A' = \lambda \qquad C' = \mu$$

y así:

$$A \cdot X^2 + 2 \cdot B \cdot X \cdot Y + C \cdot Y^2 = \lambda \cdot X'^2 + \mu \cdot Y'^2 \quad (15)$$

En donde λ, μ y los ejes **X'**, **Y'** están geométricamente determinados para el círculo Γ.

Casos no parabólicos

• **Caso Elíptico**: (Γ no intersecta al eje **Y**)

Primero utilicemos $\begin{aligned} X &= X' + h \\ Y &= Y' + k \end{aligned}$

y entonces, a través de la rotación **θ**, obtenemos los ejes **X'**, **Y'**:

$$\begin{aligned} X' &= (X-h) \cdot Cos(\theta) + (Y-k) \cdot Sin(\theta) \\ Y' &= -(X-h) \cdot Sin(\theta) + (Y-k) \cdot Cos(\theta) \end{aligned} \quad (16)$$

Bajo este cambio de variable, la ecuación cuadrática general tomará la forma:

$$\lambda \cdot X'^2 + \mu \cdot Y'^2 + F = 0 \quad (17)$$

En donde **F'** está dada por:

$$F' = C \cdot K^2 + 2 \cdot B \cdot h \cdot k + 2 \cdot E \cdot k + A \cdot h^2 + 2 \cdot D \cdot h + F$$

El lugar geométrico real existirá cuando: $F' \leq 0$.

En el caso en que $F' \langle 0$ tenemos una elipse:

$$\frac{X'^2}{a} + \frac{Y'^2}{b} = 1, \text{ donde } \begin{aligned} a &= \sqrt{-\frac{F'}{\lambda}} \\ b &= \sqrt{-\frac{F'}{\mu}} \end{aligned} \quad (18)$$

y en $0 < \mu < \lambda$ observamos que el eje **X'** coincide con el eje menor de la elipse y el eje **Y'**, coincide con el eje mayor de la elipse.

• **Caso Hiperbólico** (Γ intersecta al eje **Y** en dos puntos)

Las ecuaciones (16) y (17) son válidas.

Tenemos $\mu < 0 < \lambda$ y el lugar geométrico es una Hipérbola

$$\frac{X'^2}{a^2} - \frac{Y'^2}{b^2} = \begin{cases} 1 & si \;\; F' \langle 0 \\ -1 & si \;\; F' \rangle 0 \end{cases}$$

en donde

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{|F'|}{\lambda}} \\ b &= \sqrt{\frac{|F'|}{-\mu}}, \text{ cuando } F' \neq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

o

$$Y' = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{-\mu}} \cdot X', \text{ cuando } F' = 0 \quad (20)$$

Las rectas dadas en la ecuación (20) son, en efecto, las asíntotas de las hipérbolas definidas en la ecuación (19). Las asíntotas son útiles para construir la hipérbola y podemos ver cómo el círculo Γ se utiliza para la construcción de dichas asíntotas.

En la Figura 4 vemos que los ejes **X″** e **Y″** son una traslación de los ejes **X** e **Y**, si **J** y **K** son los puntos de corte del círculo Γ con el eje **Y**. La ecuación de la

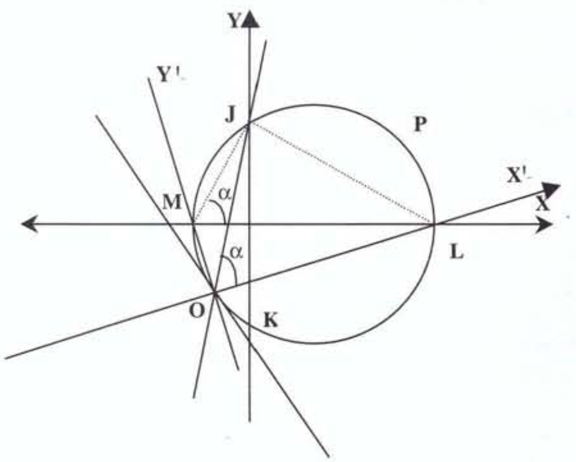


Figura 4

recta que pasa por los puntos **Q** y **J** en el sistema **X″**, **Y″** es: $Y'' = Tan(\alpha)\cdot X''$

Ahora, ΔMOJ ~ **Δ**JOL, así:

$$\frac{O\cdot J}{O\cdot M} = \frac{O\cdot L}{O\cdot J}$$

$$O\cdot J = \sqrt{(O\cdot M)\cdot(O\cdot L)} = \sqrt{\frac{\lambda}{-\mu}}$$

Esto es:

$$Tan(\alpha) = \frac{O\cdot J}{O\cdot M} = \frac{\sqrt{-\mu\cdot\lambda}}{-\mu} = \sqrt{\frac{\lambda}{-\mu}}$$

Entonces el segmento **QJ** determina la dirección de una de las asíntotas. La dirección de la otra está dada por **KQ.**

Ejemplo: para la Ecuación cuadrática

$$8\cdot X^2 - 26\cdot X\cdot Y + 7\cdot Y^2 - 540\cdot X - 300\cdot Y - 17200 = 0$$

Localizamos **P(8,-13)** y **Q(7,13)** y trazamos el círculo Γ con diámetro **PQ,** como se muestra en la Figura 5, evidentemente tenemos el caso de una Hipérbola.

Ubicando los intersectos:

$$-\frac{E}{C} = 21.4 \qquad -\frac{D}{A} = 33.8$$

$$-\frac{E}{B} = -11.5 \qquad -\frac{D}{B} = -20.8$$

Que nos permiten trazar las rectas **L1** y **L2,** que se intersectan en el centro **O'**, de la Hipérbola.

Enseguida, trazamos los ejes **X'** e **Y'**, paralelos a los segmentos **MP** y **MQ**.

Se trazan las asíntotas paralelas a **QJ** y **KQ** como lo muestra la Figura 5.

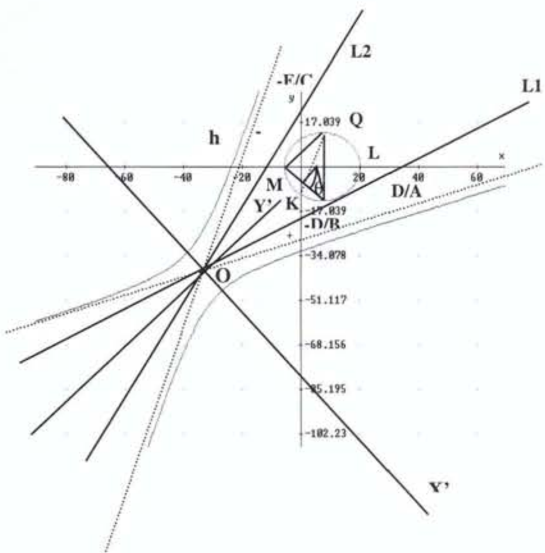


Figura 5

o usando las fórmulas (6), (8), (9), (14) calculamos:

$$\lambda = 20.5 \qquad \theta = 43.9^{o}$$

$$\mu = 5.5 \qquad h = -34$$

$$k = -41.7$$

Calculamos **F´**= -1775 utilizando (4) y empleando (19) vemos que la ecuación de la Hipérbola es:

$$\frac{X'^2}{9.3^2}+\frac{Y'^2}{17.9^2}=1$$

En donde:

$$X' = 0.72\cdot X - 0.69\cdot Y - 5.1$$
$$Y' = 0.69\cdot X - 0.72\cdot Y + 53.6$$

Caso Parabólico (Γ pasa por el origen en **XY**).

En este caso μ = 0, μ < λ para lo cual no tiene solución la ecuación (5).

La traslación de **X´ Y´** en general, no es posible. Sin embargo, la rotación (11) con su consecuencia (15) convierten la ecuación cuadrática general (1) en:

$$\lambda\cdot X'^2 + 2\cdot D'\cdot X' + 2\cdot E'\cdot Y' + F = 0 \quad (21)$$

En donde

$$\begin{aligned} D' &= D\cdot COS(\theta) + E\cdot SIN(\theta) \\ E' &= -D'\cdot SIN(\theta) + E\cdot COS(\theta) \end{aligned} \quad (22)$$

Como **μ = 0**, es conveniente que notemos de (9) que:

$$\lambda = A + C \qquad (23)$$

Comparando (22) con (10) vemos que **D´** y **E´** son las coordenadas del punto **(D, E)** en el sistema **X´**, **Y´**.

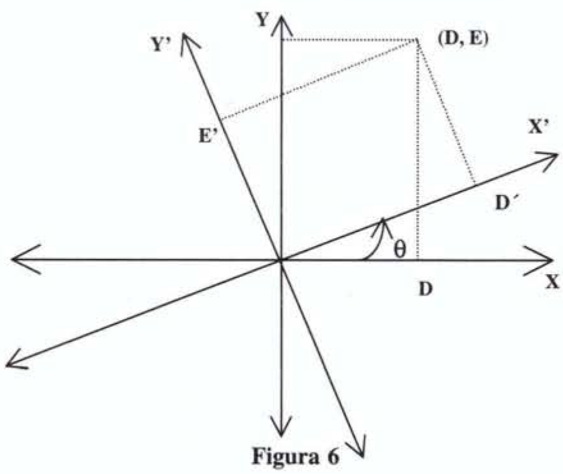


Figura 6

D´ y **E´** pueden encontrarse geométricamente tomando una proyección ortogonal sobre los ejes **X´**, **Y´**. Cuando **E´ ≠ 0**, la traslación

$$\begin{aligned} Y'' &= Y' - \frac{D'^2 - \lambda\cdot F}{2\cdot\lambda\cdot E} \\ X'' &= X' + \frac{D'}{\lambda} \end{aligned} \quad (24)$$

Muestra que (21) representa la parábola

$$X'^2 = 2\cdot p\cdot Y'; \quad p = -\frac{E'}{\lambda} \quad (25)$$

Es frecuente notar que el eje **Y´** corresponde al eje de la parábola cuando E´ = **0** (es decir, cuando **(D, E)** pertenece al eje **X´**). El lugar geométrico de (21) es el par de rectas:

$$X = \frac{-D + \sqrt{D^2 - \lambda\cdot F}}{\lambda}$$

Ejemplo: Consideremos la ecuación

$$4\cdot X^2 + 4\cdot X\cdot Y + Y^2 + 15\cdot X - 3\cdot Y + 26 = 0$$

El punto **P(4,2)** y el punto **Q(1,-2)** determinan el diámetro del círculo que pasa por el origen, esto es, se tiene el caso parabólico.

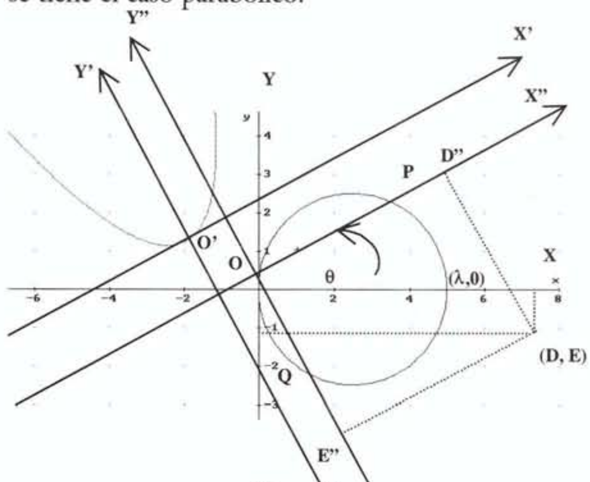


Figura 7

El punto **(D, E)** = **(7.5,-1.5)** se proyecta sobre los ejes **X**′′, **Y**′′, para determinar **D**′′ y E′′.

De todo lo anterior podremos leer de la Figura 7 las cantidades

$$\theta = 26.6°$$

$$D'' = 6.04 \qquad E'' = -4.7$$

La dirección de la traslación **X, Y** se halla de:

$$\frac{D'}{\lambda} = 1.21$$

$$\frac{D^2 - \lambda \cdot F}{2 \cdot \lambda \cdot E} = 1.99$$

Permitiendo la construcción de los ejes **X**′ **Y**′ paralelos respectivamente a **X**′′ y a **Y**′′.

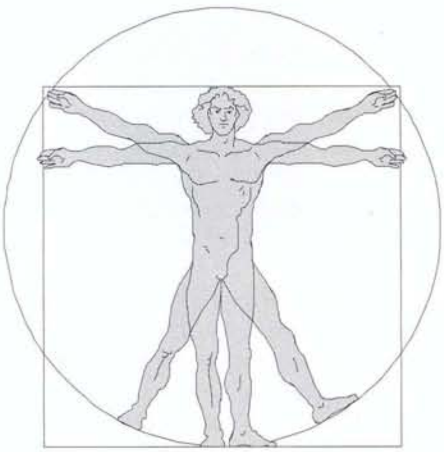
Empleando las ecuaciones (24) y (25) tendremos la parábola

$$X'^2 = 1.88 \cdot Y'$$

Cuando:

$$X' = 0.89 \cdot X + 0.45 \cdot Y - 1.21$$

$$Y' = -0.45 \cdot X + 0.89 \cdot Y - 1.99$$



BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

- APOSTOL, TOM. "Calculus", Vol I. Edit. Reverté. Santafé de Bogotá. 1988
- THOMAS y FINNEY. "Cálculo con Geometría Analítica". Vol. I. Edit. Adisson Wesley. Santafé de Bogotá. 1990.

(N. del E. la bibliografía es recomendada por los traductores)