

# CINEMÁTICA INVERSA DE ROBOTS INDUSTRIALES

GERMÁN ANDRÉS RAMOS FUENTES\*

## 1. Introducción

El uso de robots en ambientes industriales, y más precisamente en procesos de manufactura, ha generado toda una línea de investigación y desarrollo en ingeniería. El propósito es el desarrollo de dispositivos encargados del desempeño de operaciones específicas de la función de producción como manejo de materiales, procesamiento de operaciones, ensamble e inspección, realizando labores para las cuales los seres humanos no son aptos, les representa riesgo o dificultad, ejecutando ciclos repetitivos y trabajos de ensamble automatizado en líneas de producción o celdas de manufactura.

El avance en el diseño de servomecanismos y en las áreas de sensórica e instrumentación, ha provisto a los robots industriales de una mejor capacidad de desempeño en su entorno, gracias al desarrollo de sistemas de control específicos en este campo.

Un robot industrial es una máquina programable multifuncional. Dentro de ellos, los manipuladores o brazos de robot se constituyen en su forma más común. Ellos están diseñados con la capacidad de tomar decisiones, responder a entradas de sensores e interactuar y comunicarse con otras máquinas. Entre sus tareas más comunes se encuentran el transporte y manipulación de material, la ejecución de procesos de soldadura, pintura, maquinado (taladrado o corte), ensamble e inspección; como puede observarse, todos estos procesos dependen de rutinas de movimiento específicas para las cuales la posición espacial de la herramienta o efector final del robot y la trayectoria del movimiento son el objetivo del sistema.

La acción individual de cada una de las articulaciones debe ser controlada a fin de ejecutar la rutina de movimiento deseada. Específicamente, la ubicación espacial del efector final puede ser determinada mediante el conocimiento del desplazamiento traslacional o rotacional de cada articulación con respecto a una posición de referencia que determina la posición cero o de origen del robot.



### PALABRAS CLAVES

ROBOT, CINEMÁTICA DIRECTA,  
CINEMÁTICA INVERSA,  
BRAZO DE ROBOT

.....  
\* *Ingeniero Electricista Universidad Nacional de Colombia. Profesor adscrito a la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital F.J.C.*

Para ejecutar rutinas de movimiento, el robot memoriza cada posición definiendo el estado de desplazamiento de cada articulación, con el fin de poder repetir las diferentes posiciones en la secuencia y ciclos dados.

Para facilitar la interpretación humana de los movimientos y posiciones es común identificar estas últimas mediante coordenadas cartesianas  $x,y,z$ . Para ello es necesario el planteamiento de dos problemas: *determinar las coordenadas  $x,y,z$  del efector final dado un estado de arreglo de desplazamiento de las articulaciones*, y *encontrar el arreglo de desplazamiento de las articulaciones necesario para lograr tal posición dada una posición deseada  $x,y,z$  del efector final*. Para el primero se plantea una solución denominada de *cinemática directa*, y para el segundo una solución de *cinemática inversa*.

Dependiendo del tipo de articulación (traslacional o rotacional), el número total de ellas y la limitación del espacio de trabajo del robot, las soluciones de la cinemática inversa y directa puede diferir en cada caso.

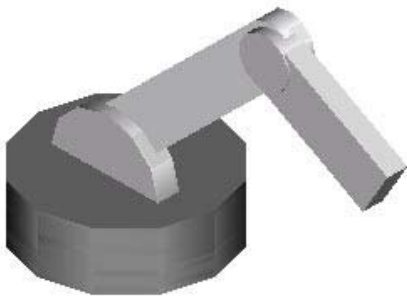


FIGURA 1. Brazo de Robot Articulado

En este artículo se analizará el movimiento de un brazo del robot articulado utilizando la cinemática directa como descriptor del tipo de robot, y desarrollando el cálculo de la cinemática inversa, para este caso por medio de triángulos oblicuángulos.

El dispositivo tiene la configuración general del brazo humano. Se encuentra compuesto por un

hombro, un codo y puede girar en su base (Ver Figura 1). Dependiendo de sus grados de libertad el brazo puede incluir una muñeca, incorporando *pitch*, *roll* y además *yaw*.

## 2. Solución de cinemática directa

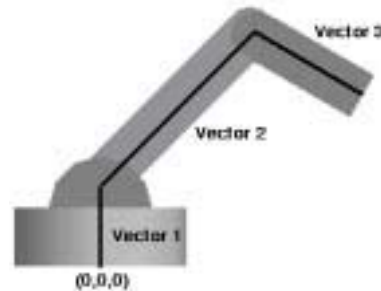


FIGURA 2. Vista lateral perpendicular al plano del robot

Esta solución puede describirse como una suma vectorial en tres dimensiones. No obstante, ella se puede reemplazar por dos veces el cálculo en dos dimensiones. El primero de estos cálculos parte de tomar una vista perpendicular al plano que forman los eslabones del robot (ver Figura 2), el cual cambia al girar la base. Los vectores son formados por los eslabones del robot, definiendo la magnitud con la longitud del eslabón y determinando el ángulo con el desplazamiento angular de las articulaciones respecto a la horizontal.

El vector resultante es la suma en dos dimensiones del Vector 1, el Vector 2 y el Vector 3 (presentados en la Figura 2). La proyección vertical de esta suma determina la coordenada

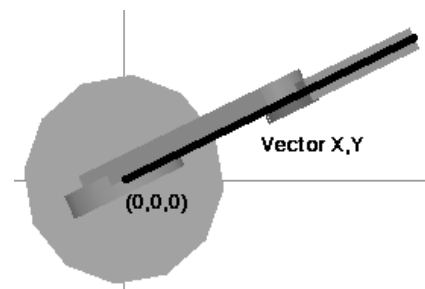


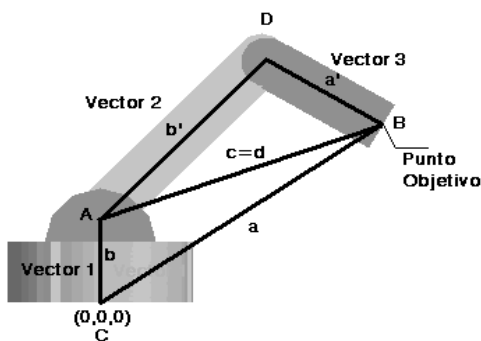
FIGURA 3. Vista Superior Plano X,Y

z, mientras la proyección horizontal define la magnitud de otro vector, que se puede observar en la vista superior (ver Figura 3). Con esta magnitud y con el ángulo de giro de la articulación de la base se construye entonces el Vector X,Y cuyas proyecciones a su vez resultan en la coordenada x,y buscada.

**3. Solución mediante cinemática inversa**

Se definirá primero el punto objetivo como el extremo del último eslabón, en donde se espera que la herramienta tenga el punto de acción; son estas las coordenadas del punto que se quieren determinar (punto objetivo), las cuales determinan el ángulo de giro que debe tener la base para alcanzarlo (ver Figura 3). El punto objetivo también es el lugar de donde se forman dos triángulos oblicuángulos<sup>1</sup>, como se muestra en la Figura 4.

En la Figura, los lados a' y b' son las longitudes de los eslabones; el lado b es la altura desde el origen cartesiano hasta la articulación inferior del primer eslabón, el lado a está determinado por la distancia desde el punto objetivo al origen, y el lado c (que coincide con el d) es la distancia desde el punto objetivo a la articulación que une el primer eslabón con la base.



**FIGURA 4.** Determinación de triángulos oblicuángulos

.....

<sup>1</sup> En los Triángulos Oblicuángulos los ángulos y los lados tienen diferente magnitud

Como se puede observar, los lados de los triángulos son conocidos y por esto se puede aplicar la ley de las tangentes para el conocimiento de los ángulos internos de los triángulos, los cuales a la vez se usan para hallar los ángulos de cada articulación.

**4. Ley de las Tangentes para la solución de triángulos oblicuángulos**

La suma del ángulo Ai (triángulo inferior) y el ángulo As (triángulo superior) define el ángulo que debe existir entre la base y el primer eslabón (Vector 1 y Vector 2).

Para el triángulo inferior.

$$\text{Tang } \frac{Ai}{2} = \frac{\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)}}{S(S-a)} \quad (1)$$

En donde:

$$S = \frac{a+b+c}{2} \quad (2)$$

Para el triángulo superior:

$$\text{Tang } \frac{As}{2} = \frac{\sqrt{(S-a')(S-b')(S-d)}}{S(S-a')} \quad (3)$$

En donde:

$$S = \frac{a'+b'+d}{2} \quad (4)$$

La medida del ángulo D es la que debe existir entre el eslabón uno y el eslabón dos (vector 2 y vector 3).

En el triángulo superior:

$$\text{Tang} \frac{D}{2} = \sqrt{\frac{(S-a')(S-b')(S-d)}{S(S-d)}} \quad (5)$$

En donde:

$$S = \frac{a'+b'+d}{2} \quad (6)$$

Con el cálculo de estos ángulos relativos entre eslabones es posible hallar los ángulos de desplazamiento que debe tener cada articulación con respecto a la horizontal.

### 5. Robots articulados con más de dos eslabones

Se considerará el caso del robot industrial de Mitsubishi RV-M1 que, además de poseer las articulaciones del robot analizado anteriormente, posee una muñeca que comprende una articulación rotacional y una de torsión adicional, sumando así cinco grados de libertad (Figura 5). Estas dos últimas articulaciones conforman el *pitch* y el *roll*, aunque es de notarse que este último no desempeña un papel fundamental a la hora de resolver numéricamente la cinemática directa o inversa. El robot *Puma*, de IBM, también presenta una configuración semejante.

#### • Cinemática directa

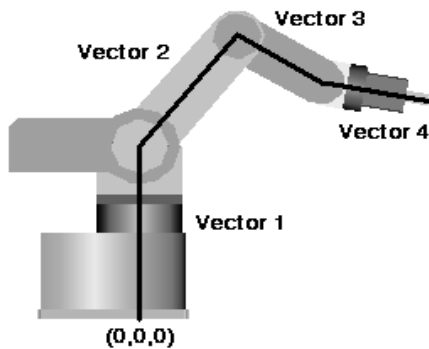


FIGURA 5. Robot con cinco grados de libertad

Este caso se puede resolver siguiendo el mismo procedimiento anterior; basta con incluir un cuarto vector, como lo indica la Figura 4.

#### • Cinemática inversa

En este caso la solución parte del conocimiento del “TCP” (Tool Center Point, o punto central de la herramienta), que es el punto que se desea alcanzar, y el *pitch* (grado de inclinación del efector final con respecto al plano X,Y), para así hallar el punto objetivo desde donde se forman dos triángulos oblicuángulos, como en el caso anterior (ver Figura 6).

De esta manera sólo queda describir la forma como se calcula el punto objetivo, conocidos el TCP y el *pitch*.

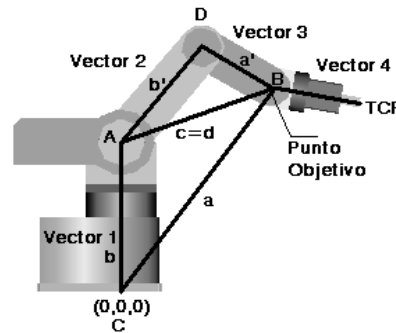


FIGURA 6. Diagrama vectorial para el RV-M1

El ángulo definido por el *pitch* define la inclinación del vector 4 con respecto a la horizontal (ver Figura 7), y ya que conocemos la magnitud del vector, definida como la longitud del eslabón, puede hallarse la coordenada z del punto objetivo como la coordenada z del TCP ± (según el caso), la proyección vertical del Vector 4.

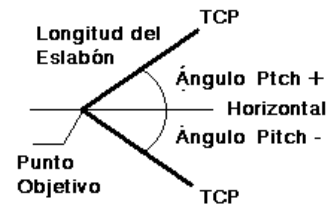


FIGURA 7. Pitch y Punto objetivo en el vector 4

En la ecuación anterior,  $z_{p.o.}$  es la coordenada  $z$  del punto objetivo,  $z_{TCP}$  es la coordenada  $z$  de TCP,  $L_e$  es la longitud del eslabón (vector 4) y  $P$  es el ángulo dado por el *pitch*.

La coordenada  $x,y$  del TCP indica el ángulo de giro  $B$  de la base. Por su parte, la coordenada  $x,y$  del punto objetivo se determina a partir de la proyección horizontal del vector 4 (Figura 7) y a su vez, desde la vista superior, su proyección en el eje  $x$  y en el eje  $y$  determina cuánto sumar o restar a la coordenada  $x$  del TCP y a la coordenada  $y$  del TCP.

$$\begin{aligned}x_{p.o.} &= x_{TCP} - V_{4ph} \cdot \cos(B) \\y_{p.o.} &= y_{TCP} - V_{4ph} \cdot \sen(B) \\con : & \\V_{4ph} &= L_e \cdot \cos(P)\end{aligned}\quad (7)$$

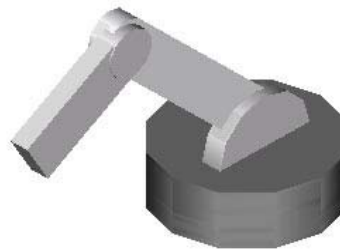
En (7),  $x_{p.o.}$  es la coordenada  $x$  del punto objetivo,  $x_{TCP}$  es la coordenada  $x$  del TCP,  $V_{4ph}$  es la proyección horizontal del Vector 4,  $B$  es el ángulo de giro de la base,  $y_{p.o.}$  es la coordenada  $y$  del punto objetivo,  $y_{TCP}$  es la coordenada  $y$  del TCP,  $L_e$  es la longitud del eslabón (Vector 4) y  $P$  es el ángulo dado por el *pitch*. De esta forma queda

calculada la coordenada  $x,y,z$  del punto objetivo; para determinar los ángulos de cada articulación se debe aplicar el procedimiento descrito para el robot anterior.

Cuando no se conoce el *pitch* se pueden encontrar múltiples soluciones, debiéndose escoger la más adecuada de acuerdo con la tarea a realizar por el robot, así como la planificación de la trayectoria.

## 6. Recomendaciones

El método de solución propuesto por la cinemática inversa ha sido descrito de manera general. En él debe tenerse especial cuidado con el tratamiento de los ángulos, realizando las interpretaciones adecuadas de su magnitud y sentido. El análisis descrito no incluye las restricciones propias del desempeño de un robot industrial, específicamente su espacio de trabajo y la dinámica de su sistema. Aunque esta circunstancia no repercute en el cálculo de determinada posición, en el momento de implementar el método es necesario conocer estos parámetros, por ejemplo si se quiere desarrollar un algoritmo que sirva de base para la elaboración de un programa de simulación.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- RAMOS F., Germán A. Herramienta de Programación y Comunicación para Micro-Robots Industriales RV-M1 en ambiente Gráfico. Santafé de Bogotá. Proyecto de grado para optar por el título de ingenieros electricistas de la Universidad Nacional de Colombia. 1999.
- MITSUBISHI. Instruction Manual Industrial Micro-Robot System Model RV-M1. Mitsubishi Electric Corporation. Tokio JAPON. 1996
- PARRA, Conti. Parámetros para el diseño de manipuladores. Santafé de Bogotá. Universidad Nacional de Colombia. 1994