

# LEVITACIÓN MAGNÉTICA DE UNA ESFERA UTILIZANDO UN COMPENSADOR PID DIGITAL Y ETAPA DE POTENCIA PWM

DANILO RAIRAN ANTOLINES\*  
 drairan@col1.telecom.com.co  
 FRANCISCO J. MILLÁN R.\*\*  
 sensorica@starmedia.com

## 1. Modelamiento del Sistema

Todos los sistemas que utilicen la levitación magnética para sustentar elementos ferromagnéticos deben contar, por lo menos, con los siguientes elementos: un sistema eléctrico, el cual es constituido por una fuente variable de voltaje y una bobina de resistencia interna definida; además, un sistema electromecánico, que utiliza la energía eléctrica almacenada en la bobina en forma de campo magnético para compensar la energía mecánica. Esta última relación se comprueba físicamente como el equilibrio de fuerza electromagnética y mecánica.

En la Figura 1 se presenta un esquema de la planta a controlar, y a continuación se desarrollan algunas de las relaciones básicas para el modelamiento de la planta:

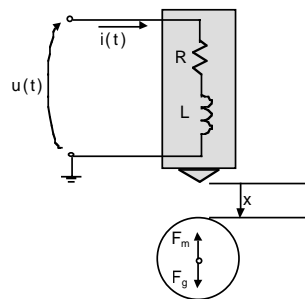


FIGURA 1. Esquema del Sistema de Levitación Magnética



### PALABRAS CLAVES

COMPENSADOR PID DIGITAL,  
 ETAPA DE POTENCIA PWM,  
 LEVITACIÓN MAGNÉTICA

\* *Ingeniero Electricista y Magíster en Automatización Industrial Universidad Nacional de Colombia. Profesor tiempo completo de la Universidad Distrital F.J.C., adscrito a la Facultad Tecnológica. Investigador en Levitación Magnética*

\*\* *Tecnólogo Electrónico Universidad Distrital F.J.C. Estudiante de Ingeniería en Control e Instrumentación de la misma Universidad. Auxiliar de Investigación, Grupo de Investigación en Levitación Magnética*

$$u = R * i + \frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

$$\phi = L * i \quad (2)$$

$$m\dot{x} = F_m + F_g \quad (3)$$

$$F_g = mg \quad (4)$$

La ecuación 1 expresa la suma de voltajes alrededor del lazo cerrado; en (2) se muestra la relación entre flujo y corriente, conocida como inductancia; en (3) se expresa la ecuación de equilibrio para las fuerzas presentes. La relación entre el sistema eléctrico y el mecánico determina la fuerza magnética, y es relativamente simple demostrar que ella se puede expresar como (5)<sup>1</sup>.

$$F_m = \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} i^2 \alpha \frac{i^2}{x^2} \quad (5)$$

En la ecuación anterior, L está definida por (6).

$$L = L_0 + L_1 \epsilon^{-x/\alpha} \quad (6)$$

Las constantes se hallan mediante pruebas experimentales<sup>2</sup>. Teniendo en cuenta las características del sistema a trabajar, a saber, masa de la esfera 66 gramos y punto de equilibrio 5 mm, mediante pruebas se obtiene que: L<sub>0</sub>=0.155 [H], L<sub>1</sub>=0.258 [H], g=9.81 [m/s<sup>2</sup>], R=12.79 [W], a= 0.00825.

Las ecuaciones (1) a (6) definen el modelo en variable de estado presentado en (7).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= vel \\ vel &= -\frac{L_1}{2cm} i^2 \epsilon^{-x/\alpha} + g \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L_0 + L_1 \epsilon^{-x/\alpha}} \left( u - Ri + \left( \frac{L_1}{\alpha} * vel * i \epsilon^{-x/\alpha} \right) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

- 1 P.K. Sinha. *Electromagnetic Suspension, Dynamics & Control, Capítulo 4*
- 2 *Sustentation magnétique, synthèse d'un régulateur. Oliver Chetelat*
- 3 Una explicación más detallada del proceso de linealización junto con la metodología experimental para hallar las constantes se encuentra en "Sustentation Magnétique, Synthèse d'un Régulateur"
- 4 Para una análisis más detallado del cálculo del controlador en Z, ver: MARTINEZ M., RAIAN D., Implementación de un Controlador PID Digital para el Control de Posición de un Cilindro Hidráulico Lineal. En: Revista Ternura N°. 9, 2001, ps. 28-36
- 5 De las siglas en Ingles correspondientes a Modulación por Ancho del Pulso.

Una vez linealizado el modelo alrededor del punto de equilibrio y teniendo en cuenta las constantes adicionales se tendrá la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 5[mm] \quad \bar{vel} = 0 \quad \bar{i} = 0.355[A] \quad \bar{u} = 4.54[V] \\ \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1189 & 0 & 55.2 \\ 0 & -106.4 & -37.3 \end{bmatrix} * X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.9 \end{bmatrix} * u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0] * X + 0 * u \end{aligned} \quad (8)$$

En donde el vector de estado "x" corresponde a la posición, velocidad y corriente respectivamente<sup>3</sup>. El sistema posee la siguiente distribución de polos: S<sub>1</sub>=30.4227, S<sub>2</sub>= -33.8800 +17.6494i, S<sub>3</sub>= -33.8800 -17.6494i, es decir, por naturaleza es inestable, como lo demuestra la ubicación del polo S<sub>1</sub> en el lado derecho del plano "S".

## 2. Simulación del Sistema de Control

El desarrollo de la simulación se realizó en *Simulink* de Matlab, y tiene como propósito hacer una verificación de la efectividad del sistema de control previa a su construcción. En este modelo se tiene en cuenta el efecto de la digitalización del controlador, utilizando transformada "Z"<sup>4</sup>; adicionalmente se incluye el proceso PWM<sup>5</sup>. El montaje general se presenta en la Figura 2.

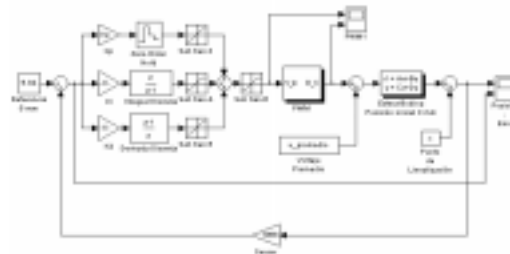
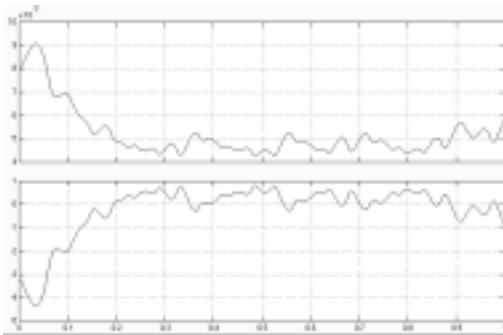
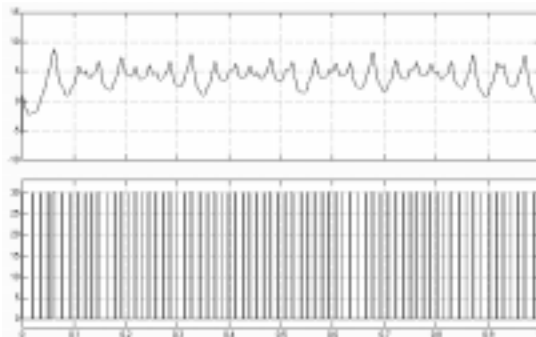


FIGURA 2. Modelo de la planta junto con el controlador, sensor y etapa de potencia PWM

Del modelo presentado en la Figura 2 es importante resaltar la utilización de las saturaciones para cada uno de los componentes del controlador y su respectiva salida, que tienen el propósito de emular el comportamiento verdadero de un compensador PID análogo. Las Figuras 3, 4 y 5 son una muestra del resultado de la implementación de la etapa PWM para un punto de sintonización en particular; además muestran la posición de la esfera y el error de posición del sistema en esas mismas condiciones.

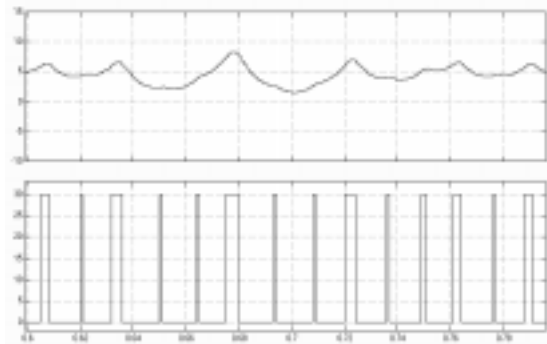


**FIGURA 3.** a) Posición de la esfera.  $K_p=0.7$ ,  $K_i=2$ ,  $K_d=0.06$ . b) Error de posición del Sistema



**FIGURA 4.** a) Salida del voltaje del compensador. b) Salida PWM

La Figura 4 muestra que efectivamente el voltaje promedio en el punto de equilibrio es alrededor de 4.5 [V]. En la Figura 5 se observa que



**FIGURA 5.** Detalle del Funcionamiento de la Conversión Análoga – PWM

aumentando el ancho del pulso se incrementa el voltaje de la salida del compensador PID digital.

### 3. Construcción

La etapa de control se subdivide en tres partes, a saber: acondicionamiento de la señal de posición, ajuste de los parámetros del controlador y, finalmente, la aplicación del algoritmo de control PID digital. A continuación se explica el desarrollo de cada una de ellas.

#### a) Acondicionamiento de señal de posición

Utilización de dos amplificadores operacionales conectados en cascada, con una ganancia de 0.5; ellos se encargan de reducir el voltaje a un nivel manejable y seguro para el microcontrolador.

#### b) Ajuste del control

Es la etapa en la que interviene directamente el usuario. En ella se configura el funcionamiento del controlador mediante la utilización de pulsadores y potenciómetros; también se varían parámetros como ganancias, valor de referencia y base de tiempo para el controlador. El sistema cuenta además con una opción que le permite al usuario probar el módulo PWM; la herramienta fue de gran utilidad, tanto para la selección de la etapa de potencia como para la verificación de la respuesta del electroimán a la modulación

por ancho de pulso. Como aspecto complementario, todos los parámetros del sistema se pueden visualizar en una pantalla de cristal líquido que es el núcleo de la interfaz al usuario.

**c) Controlador PID digital**

Esta etapa se implementó con un microcontrolador PIC 16F877. En ella se ha definido la parte fundamental del dispositivo, encargada de recibir la señal de posición de la esfera, procesarla y enviarla en formato PWM a la etapa de potencia; además es la encargada de coordinar el funcionamiento de las demás etapas.

El controlador PID digital funciona mediante tres algoritmos matemáticos que simulan las tres operaciones realizadas por el controlador PID análogo, así:

**• Toma de error**

La operación que se efectúa es una resta entre la señal de referencia (posición deseada para la levitación) y la señal entregada por el sensor; esto es:

$$e(n) = V_{ref}(n) - X(n) \quad (9)$$

En donde  $V_{ref}$  es la posición deseada para la esfera;  $X(n)$  es su posición actual, y  $e(n)$  es la señal de error en el instante n. El resultado de esta operación se multiplicará, integrará y derivará en las demás etapas.

**• Etapa Proporcional**

Es una multiplicación entre la señal de error y la constante proporcional del compensador, como lo presenta la ecuación 10. De esta etapa se obtiene una señal de salida “Kp” veces la entrada.

$$K_p * e(n) \quad (10)$$

6 Kuo Benjamin C. *Sistemas de Control Digital, Capitulo 9*

7 Este tipo de derivada se denomina derivada por aproximaciones rectangulares

El resultado de la aplicación de este algoritmo se observa en la Figura 6.

**• Etapa Integral**

Integra la señal de error mediante el método de integración rectangular hacia atrás<sup>6</sup> y mantiene una “memoria” del valor de señal de salida. Una vez se alcanza la posición deseada ésta se mantiene gracias al valor acumulado por la etapa integral (ver Figura 7).

$$I(n) = I(n-1) + K_i * \Delta t * e(n) \quad (11)$$

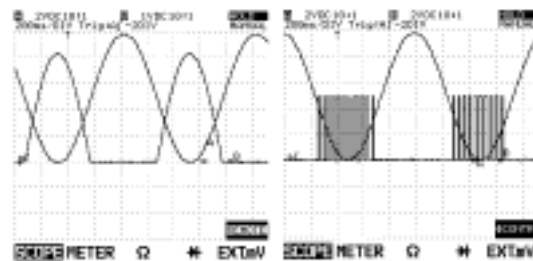
En la ecuación (11)  $I(n)$  es la integral en el muestreo n;  $I(n-1)$  es la integral en el muestreo inmediatamente anterior y  $K_i$  es la ganancia integral.

**• Etapa derivativa**

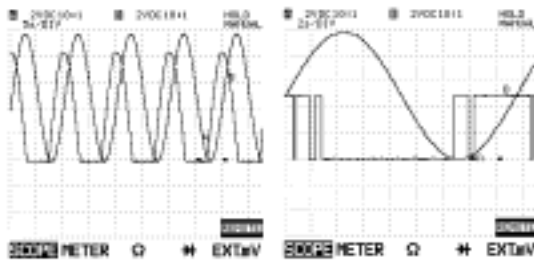
El efecto principal de esta etapa es contrarrestar los cambios bruscos de posición oponiéndose a ellos; así, se constituye en complementaria a la etapa proporcional<sup>7</sup>. Su desarrollo se presenta en la ecuación 12.

$$D(n) = \frac{Kd * (e(n) - e(n-1))}{\Delta t} \quad (12)$$

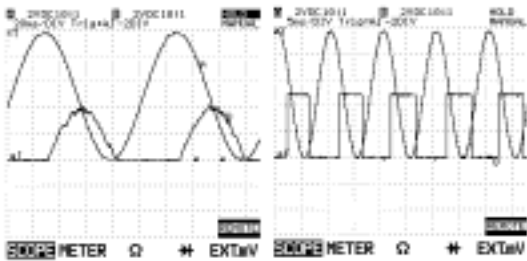
En donde  $D(n)$  es la derivada en el instante n,  $\Delta t$  es la base de tiempo para la muestra y  $Kd$  es la ganancia diferencial. Una muestra del efecto de esta etapa se presenta en la Figura 8.



**FIGURA 6.** Señales de salida etapa proporcional. a) PID digital, salida análoga (Canal B). b) PID digital, salida PWM ( Canal B)



**FIGURA 7.** Señales de salida etapa integral. a) PID digital, salida analoga (Canal B). b) PID digital, salida PWM ( Canal B)



**FIGURA 8.** Señales de salida etapa diferencial. a) PID. digital, salida analoga (Canal B). b) PID digital, salida PWM (Canal B)

• **Sumatoria final**

En este momento se suman los resultados de las tres etapas anteriores y el resultado es utilizado como valor de ciclo útil de la señal PWM.

Debe anotarse que el valor  $\Delta t$  es la base de tiempo para los algoritmos de integración y diferenciación del proceso PID, y que el periodo de muestreo debe ser lo suficientemente pequeño para que las características dinámicas del controlador continuo no se pierdan en la digitalización<sup>8</sup>; es decir que cada  $\Delta t$  veces se toman las muestras de posición de la esfera y se procesan, por lo que  $1/\Delta t$  es la frecuencia de actualización del sistema. Este valor debe ser lo más exacto posible y el tiempo de ejecución de

.....

<sup>8</sup> Kuo Benjamín C., *Automatic Control Systems*, p. 842

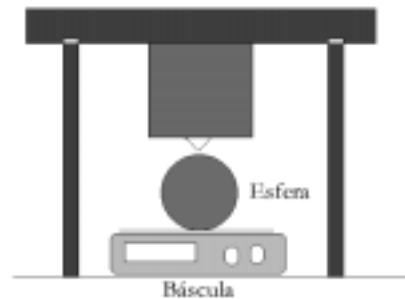
los algoritmos no debe ser mayor a el; en este caso los algoritmos tardan en promedio 300 mS, el valor  $\Delta t$  queda expresado por la ecuación 13.

$$\Delta t \geq \frac{1}{FrecuenciaPWM} \quad (13)$$

**4. Implementación**

Los algoritmos descritos anteriormente utilizan rutinas matemáticas de punto fijo con resolución máxima de 32 bits por argumento. Sin embargo la resolución máxima para las constantes es de 18 bits, debido a la resolución del módulo análogo digital del microcontrolador. Se emplean 8 bits para representar la parte entera y 10 bits para la parte decimal; esto hace que se obtenga una resolución máxima de 2E-10 para el valor decimal y 2E8 para el valor entero.

En la etapa proporcional se utilizó una rutina de multiplicación de 24\*24 bits; para las dos etapas restantes, una rutina de multiplicación de 32\*32 bits; las sumas y restas necesarias también son de 32 bits.



**FIGURA 9.** Montaje para la obtención de curvas de respuesta, de peso y corriente

Para generar la señal PWM se utilizó uno de los módulos incluidos en el microcontrolador, trabajando con un cristal de 20 Mhz.

Una vez probado el funcionamiento de los algoritmos PID digital se procedió a hacer las pruebas para escoger la etapa de potencia y comparar el desempeño del electroimán. Se comprobó el efecto del cambio de formato en la salida del controlador sobre la corriente de la bobina; para este fin se utilizó el montaje descrito en la Figura 9. Así, la balanza registró el cambio en el peso de la esfera a medida que se aumentó la corriente; de ello se obtuvo la relación entre peso y corriente, al igual que la relación entre el voltaje análogo del controlador y la corriente en el electroimán para el caso de la etapa análoga, y ciclo útil contra corriente para PWM, como se observa en la Figura 10.

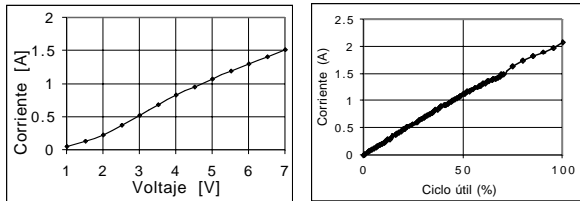


FIGURA 10. Corriente en el electroimán. a) con etapa de potencia análoga. b) con PWM

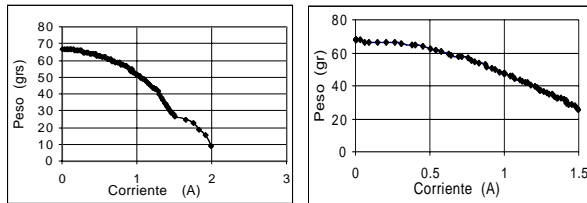


FIGURA 11. Corriente aplicada vs. peso medido. a) etapa de potencia PWM. b) etapa de potencia análoga

La Figura 10 muestra el comportamiento de la corriente en la bobina; puede apreciarse que ella varía de forma lineal con el ciclo útil aplicado. En cuanto a la relación *corriente vs. fuerza*, las mediciones realizadas permitieron la obtención de los resultados de la Figura 11.

9 La sumatoria total de ambas resistencias en este caso es de 6.1 ohmios, esta resistencia se debe reducir al máximo (0.01W), en el caso de decidir utilizar un segundo lazo de control de corriente.

10 Una explicación mas detallada de este método se puede encontrar en "Electrónica de Potencia: Circuitos dispositivos y aplicaciones", Rashid M., Capitulo 8.

Después de concluidas las pruebas necesarias y habiéndose observado una respuesta similar para las etapas de potencia análoga y PWM en cuanto a la variación de corriente, el sistema completo se puso en funcionamiento acoplando todas las etapas. Fue así como se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 12; en ella se observa una oscilación interpretada como un error de estado estacionario alrededor del valor de referencia, que tiene una amplitud pico a pico promedio de dos voltios; esto quiere decir que la posición de la esfera varía  $\pm 2$  mm. con respecto al valor de referencia.

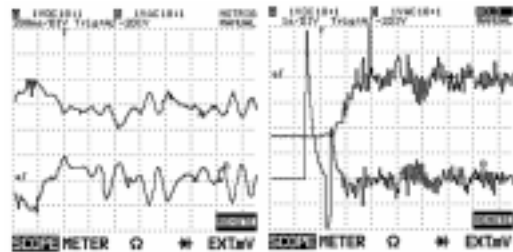


FIGURA 12. Señales de posición (A) y de error (B) del controlador en funcionamiento

La etapa de potencia que se utilizó para el dispositivo final se ilustra en la Figura 13. Allí puede verse la resistencia en serie<sup>9</sup> a la bobina, que sirvió para mejorar su respuesta a la modulación por ancho de pulso. Los condensadores en paralelo a la resistencia de base de los transistores son necesarios para acelerar el apagado de los transistores<sup>10</sup>.

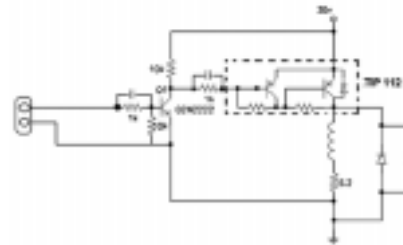


FIGURA13. Etapa de potencia utilizada en el dispositivo final

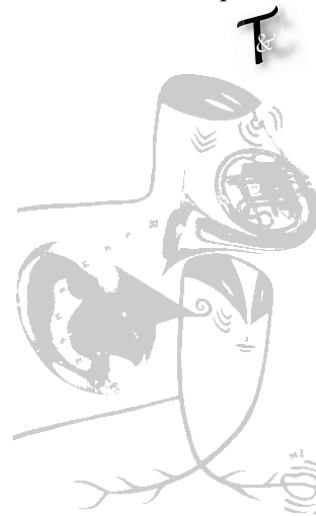
## 5. Conclusiones

Luego de haber experimentado con el dispositivo y probado la mayor cantidad de alternativas posibles para el buen funcionamiento, especialmente de la etapa de potencia, se pueden hacer varias observaciones al respecto, presentadas a continuación:

- Al utilizar el microcontrolador PIC 16F877 para hacer el procesamiento de la señal de realimentación se debe tener en cuenta la base de tiempo del controlador y la existencia de una correlación adecuada entre los tiempos de ejecución de los algoritmos, todo para un ajuste adecuado de la frecuencia PWM, con el fin de evitar al máximo el solapamiento de los datos al actualizar el valor de ciclo útil en el módulo PWM del microcontrolador
- La selección de la frecuencia PWM depende del tiempo de respuesta, o *tao mecánico* del sistema, especialmente el de la bobina, que es el de mayor incidencia sobre esta frecuencia. En el caso analizado el tiempo de respuesta es de 23 [mS]. Teniendo en cuenta este valor se optó por utilizar la mínima frecuencia PWM disponible del microcontrolador, es decir 1.22 [KHz]. Por esta razón el valor mínimo para la base de tiempo fue 892 [mS]
- Debido a que la frecuencia PWM ya estaba en su valor mínimo y aún no se conseguía la levitación de la esfera, se optó por modificar las características de la bobina; el tiempo de respuesta se redujo aproximadamente a 15.6 [mS] colocando una resistencia en serie de 6.2 [W]. Se puede mejorar en gran medida el comportamiento de la posición de la esfera si se realiza un segundo lazo de control, en este caso de corriente; esto tendría el mismo

efecto que tuvo la resistencia en serie a la bobina, con la diferencia que no se pierde potencia en dispositivos adicionales, ya que en este caso la resistencia agregada consume aproximadamente dos a tres vatios mientras el dispositivo está en funcionamiento

- La etapa de potencia se puede hacer aún más eficiente si se utilizan mosfets de potencia ó transistores UJT, debido a que estos dispositivos tienen una respuesta muy rápida para la conmutación, y ayudarían a tener un valor de ciclo útil en la bobina más parecido al valor aplicado en la entrada de la etapa de potencia, por la etapa de control
- El microcontrolador utilizado cuenta con limitaciones cuando se trata de aplicaciones de control en tiempo real<sup>11</sup>, aunque sea poderoso para otros tipos de procesos. Por lo tanto, es importante trabajar con otros dispositivos de control digital, posiblemente con tecnología PDS (*proceso digital de señal*), que permite mucha más flexibilidad para los cálculos de velocidad y exactitud. El mejoramiento de la velocidad de ejecución permite que la frecuencia de muestreo de un PDS sea mayor de 20 Khz<sup>12</sup>, con lo cual es posible obtener datos más precisos para el control en menor tiempo.



<sup>11</sup> CAAMAÑO, Gustavo, "Análisis Espectral por Corrimiento de la Frecuencia de Muestreo", *Tecnura No 4*.

<sup>12</sup> Kuo Benjamin C., *op. cit.*, p. 702

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAAMAÑO LEON Gustavo, "Análisis Espectral por Corrimiento de la Frecuencia de Muestreo". En: Revista Tecnura No. 4, 1999
- GUALDA GIL J. A. , MARTINEZ S. , MARTINEZ P.M, "Electrónica Industrial: Técnicas de Potencia". 2ª. ed.. Barcelona. Marcombo S.A.
- KUO Benjamín C. "Sistemas de Control Digital". 1ª. ed., México, CECSA. 1997
- KUO Benjamin C. "Automatic Control Systems". Seventh edition. E.C, New Jersey. Prentice Hall. 1995.
- MALONEY Timothy J. "Electrónica Industrial Moderna". Tercera edición. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. 1997.
- Microchip Technichal Library, Second Edition 200.
- RASHID Muhamad H. "Electrónica de Potencia: Circuitos Dispositivos y Aplicaciones". 2ª. ed. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.1993
- SINHA P.K, "Electromagnetic Suspensión, Dynamics & Control"
- CHETELAT, Oliver. Sustentation Magnétique, Synthèse d'un Régulateur. En: <http://iawww.epfl.ch/Laboratoies/levitaion/LevitaionFrame.html>
- MARTINEZ M., RAIRAN D. Implementación de un Controlador PID Digital para el Control de Posición de Cilindro Hidráulico Lineal. En: Revista Ternura N° 9, 2001

