

# SOLITONES KINK Y ANTIKENK EN LA ECUACIÓN DE SINE -GORDON

**Francis Armando Segovia Chaves**  
Magister en Ciencias Física  
Universidad Distrital Francisco José  
de Caldas  
fasegoviac@udistrital.edu.co  
Bogotá, Colombia

## KINK AND ANTIKINK SOLITONS ON SINE-GORDON EQUATION

### ABSTRACT

The sine-Gordon equation is a non-linear differential equation that has a wide range of applications, not only within relativity-field theory but also in solid-state physics and optical-fiber traveling signals. The present work focuses on two of the solutions to this differential equation, namely the kink-soliton solution and the antikink-soliton solution. In order to obtain such solutions, mathematical models are necessary so as to provide a graphical representation of the equation's space-time evolution.

**Key words:** Sine-Gordon equation, non-linear differential equations, soliton.

### RESUMEN

La ecuación de sine-Gordon es una ecuación diferencial no lineal, tiene grandes aplicaciones no solamente en la teoría de campos relativistas, sino también encuentra aplicación en la física del estado sólido y en el transporte de señales en la fibra óptica. En este trabajo se estudian dos soluciones que tiene esta ecuación diferencial como lo son las soluciones tipo solitón kink y soluciones tipo solitón antikink. Para obtener dichas soluciones se realiza el modelamiento matemático y se representa gráficamente su evolución espacio temporal.

**Palabras claves:** ecuación sine Gordon, ecuaciones diferenciales no lineales, soliton.

**Tipo:** Artículo de investigación

**Fecha de Recepción:** Febrero 14 de 2012

**Fecha de Aceptación:** Mayo 2 de 2012

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad nuevos desarrollos basados en partículas llamadas solitón permitirán alta capacidad de transmisión de señales a través de muy grandes distancias. La tecnología referente a los solitón, hace referencia básicamente a los efectos de dispersión controlados y de los efectos no lineales, así como de otros métodos como el counter-balancing o el código de Retorno a Cero (RZ), lo cual impedirá el ensanchamiento de los pulsos durante su viaje a través de la fibra óptica, capacitando enlaces de larga distancia sin dispersión aparente en el extremo. Un solitón es una clase especial de pulso de luz que mantiene su forma, normalmente Gaussiana, a lo largo de su viaje, alcanzando grandes distancias siempre que se amplifique en espacios regulares. La especial forma de la onda de un solitón autocompensa la dispersión que presentaría una onda corriente, basándonos en el hecho de que el índice de refracción de la fibra óptica presenta efectos no lineales que dependen de la potencia del pulso. Un solitón aprovecha los efectos de la no linealidad y la dispersión cromática para conservar su forma. Otra propiedad importante de un solitón es su característica de propagación estable en todo el enlace, así como su robustez frente a perturbaciones. Aunque esta técnica se limite por la atenuación de la fibra, con la amplificación óptica podemos obtener enlaces de ultra larga distancia, varios miles de kilómetros [1].

Hay un interés grandísimo en la tecnología de solitones, ya que estos pueden viajar grandes distancias sin presentar dispersión sobre una fibra monomodo corriente, es decir, altamente dispersiva. Sería una tecnología ideal a combinar con TDM, ya que venceríamos las limitaciones que presenta la dispersión en la fibra en cuanto a distancia, logrando sistemas de más de 100Gbps sobre grandes distancias en una transmisión virtualmente libre de errores, sin usar otros costosos métodos como sería la fibra de dispersión cero.

Matemáticamente se puede estudiar la presencia de solitones por medio de ecuaciones

diferenciales no lineales, entre las cuales podemos destacar la ecuación de sine-Gordon quien tiene diversas aplicaciones en un amplio rango de la física, no solo en la teoría de campos relativista [2], sino también en física del estado sólido y óptica no lineal. Las soluciones particulares correspondientes a la ecuación de sine Gordon que se estudiaran en este trabajo son las de tipo kink y antikink. Las soluciones kink corresponden a un cambio de  $2\pi$  en la variable angular, esto origina una rotación en sentido antireloj que se propagan en forma no distorsionada y son los llamados solitones [3]. Las soluciones antikink corresponden a una solución similar a la anterior, solo que estas producen un giro o rotación en sentido contrario a la de kink[4].

## 2. METODOLOGÍA

En este trabajo se presenta el modelo matemático que representa la obtención de una solución particular de la ecuación de sine Gordon mediante la cual se puede evidenciar la existencia de soluciones del tipo localizadas llamadas solitones tipo kink y antikink. Haciendo uso del paquete matemático Matlab 7.0 se representara gráficamente las soluciones analíticas obtenidas así como su evolución espacio temporal.

### 2.1. Modelo matemático: Ecuación de sine-Gordon

En la teoría de campos la ecuación lineal de Klein Gordon es [5]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m^2 \varphi \quad (1)$$

La anterior ecuación se obtiene del lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^2 - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]^2 \right) + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (2)$$

Al reemplazar  $1/2(m^2\varphi^2)$  por una variación periódica  $1/2 m^2(1-\cos(\varphi))$  se obtiene la ecuación diferencial no lineal de sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m^2 \sin \varphi \quad (3)$$

En el presente trabajo solucionamos la Ec. (3) en el caso de  $m=1$ .

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sin \varphi \quad (4)$$

## 2.2. Solución de la ecuación de sine-Gordon

Sea  $\varphi(x,t) = u(x-vt) = u(\varepsilon)$ , siendo  $v$  la velocidad del solitón. Representamos la Ec. (4) en términos de las nuevas variables propuestas, para ello se debe tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{d}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \\ \frac{d}{dt} &= \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d}{d\varepsilon} = -v \frac{d}{d\varepsilon} \end{aligned}$$

Se obtiene en definitiva

$$(1 - v^2) \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} = \sin u \quad (5)$$

Dividiendo la Ec. (5) por  $1-v^2$  y la multiplicamos con  $\frac{du}{d\varepsilon}$ :

$$\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \frac{du}{d\varepsilon} - \frac{\sin u}{(1 - v^2)} \frac{du}{d\varepsilon} = 0 \quad (6)$$

Para solucionar la Ec. (6) se debe tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \frac{du}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 \right] = 0 \\ - \frac{\sin u}{(1 - v^2)} \frac{du}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\cos u}{1 - v^2} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la Ec. (6) se escribe:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 \right] + \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\cos u}{1 - v^2} \right) = 0 \quad (7)$$

Integramos la Ec. (7), para obtener

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{\cos u}{1 - v^2} = A \quad (8)$$

Donde  $A$  es una constante de integración.

Se resuelve ahora la ecuación diferencial (8).

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \pm \sqrt{2A - \frac{2 \cos u}{1 - v^2}} \quad (9)$$

Haciendo el cambio de variable  $B = A(1 - v^2)$ , la Ec. (9) se reescribe:

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \pm \sqrt{B - \cos u} \quad (10)$$

Integramos en ambos lados de la Ec. (10).

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{B - \cos u}} = \pm \sqrt{\frac{2}{1 - v^2}} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon \quad (11)$$

Por conveniencia escogemos  $B=1$  y además tenemos en cuenta la relación trigonométrica.

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

La Ec. (11) se simplifica.

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{u}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{2}{1 - v^2}} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon \quad (12)$$

En definitiva, resolviendo las integrales de (12) y teniendo en cuenta que  $\varphi(x, t) = u(\varepsilon)$  el resultado final.

$$\varphi(x, t) = 4 \arctg \left[ \exp \left( \pm \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \quad (13)$$

La Ec. (13) representa la solución analítica de la ecuación de sine-Gordon (4). El signo (+) hace referencia a los solitones kink, y el signo (-) hace referencia a los solitones antikink.

## 3. RESULTADOS

En la Fig. 1, se representa las soluciones de un solitón kink, donde se escoge la solución con signo positivo de la Ec. (13), en ella se escoge como velocidad de  $v=0.8$  para un tiempo de  $t=0$ .

$$\varphi(x, t) = 4 \arctg \left[ \exp \left( \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

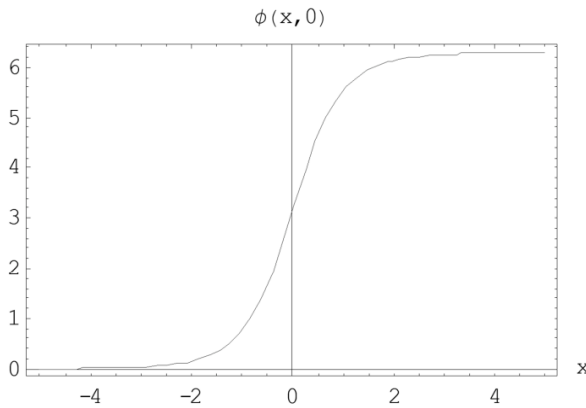


Fig. 1. Soliton kink para t=0 y v=0.8.

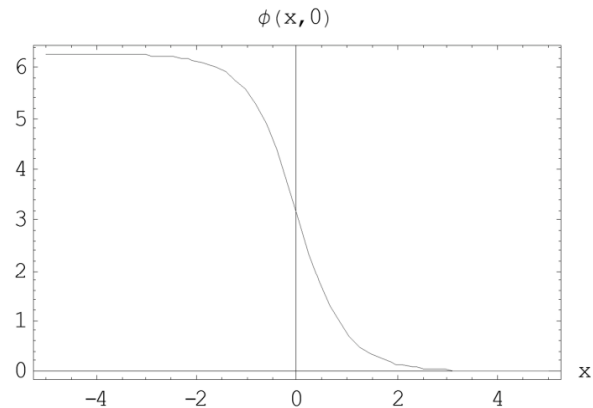


Fig. 3. Solitón antikink para v=0.8 y t=0.

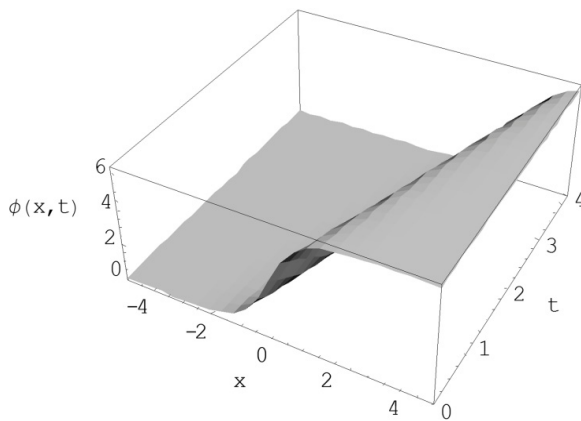


Fig. 2. Solitón kink para v=0.8 y una variación del tiempo entre 0 y 4.

En la Fig. 2, se representa la variación espacio temporal del solitón cuando su velocidad es de 0.8 y el tiempo varía entre 0 y 4. Se observa que a medida que la variación espacial aumenta de manera positiva, el perfil del solitón se mantiene constante. Contrario al caso en que la variación espacial disminuye, el perfil decrece hasta que se hace cero.

Si se toma el signo menos de la Ec. (13) se obtiene una solución antikink:

$$\varphi(x,t) = 4\text{arctg}\left[\exp\left(-\frac{x-vt-x_0}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right] \quad (14)$$

En la Fig. 3, se representa el perfil del solitón antikink cuando la velocidad es de v=0.8 en un tiempo de t=0.

En la Fig. 4, se presentan los resultados de la variación espacio temporal cuando el tiempo varía entre 0 y 4. Caso contrario a los resultados presentados en las Fig. 1 y 2, en la Fig. 4 se observa que a medida que la variación espacial aumenta de manera positiva, el perfil del solitón decrece hasta que se hace cero y se mantiene constante solamente cuando la variación espacial disminuye.

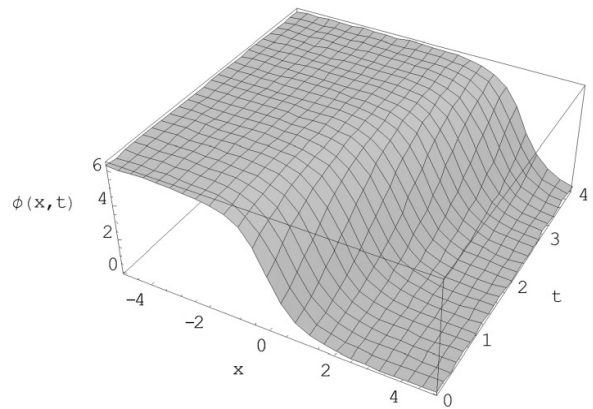


Fig. 4. Solitón antikink para v=0.8 y una variación del tiempo entre 0 y 4.

En la Fig. 5, se presentan ambas soluciones correspondientes a la solución de la Ec. (13). Es decir, se presentan las variaciones espacio temporal de las soluciones kink y antikink. Como se puede apreciar, ambas soluciones tienen direcciones opuestas de propagación.

Las derivadas de  $\varphi(x,t)$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$  también

representan ondas solitarias, se obtiene como resultado

$$\varphi = \pm \frac{2 \operatorname{sech} \left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

En la Fig. 6 se representan las dos soluciones de la Ec. (14) en el caso en que la velocidad de las ondas es  $v=0.8$  y para cuatro tiempos ( $t=1, 2, 3, 4$ ).

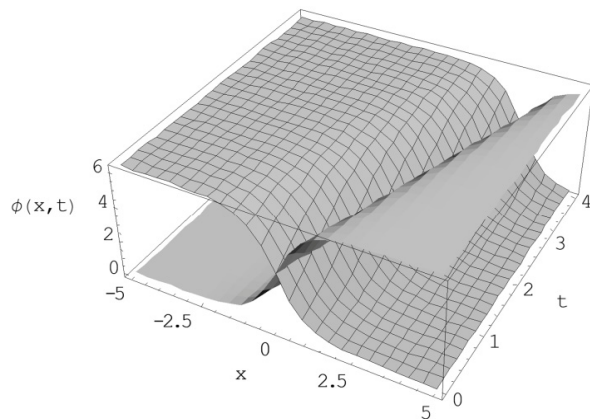


Fig. 5. Evolución espacio temporal.

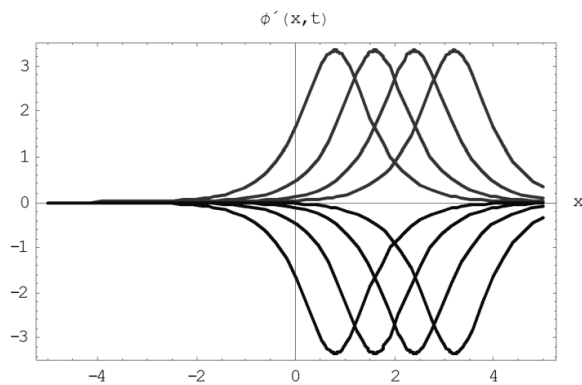


Fig. 6. Ondas solitarias dadas por la Ec. (14) para una velocidad de  $v=0.8$  y una variación en el tiempo entre  $t=1$  y  $t=4$ .

En la Fig. 6 se observa que a medida que el tiempo aumenta desde 1 a 4, la onda solitaria se desplaza hacia la derecha, lo cual indica una evolución tanto en el espacio como en el tiempo. Las ondas presentadas en la región positiva hacen referencia al signo positivo

de la Ec. (14). Contrario a las ondas con signo negativo de la Ec. (14), las cuales se encuentran en la región negativa de  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$

#### 4. CONCLUSIONES

Los solitones pueden ser descritos como pulsos ideales y son muy importantes en sistemas ópticos de telecomunicaciones. La tecnología de solitones está siendo desarrollada ampliamente en el área de las ciencias e ingeniería, las cuales prometen un enorme cambio en la funcionalidad y la capacidad de transmisión óptica de datos. El objetivo que se busca utilizando tecnología de solitones es propagar pulsos por una fibra sin que sus propiedades al final de una larga distancia hayan variado. La palabra solitón se forma con el sufijo de partícula, como se tiende a hacerlo con cualquiera de estas en Física (electrón, protón, etc), y deriva de la frase "solución solitaria", ya que un solitón es una solución simple a la ecuación de propagación de onda.

En el presente trabajo usamos un modelamiento matemático para solucionar la ecuación de sine Gordon, ecuación que se caracteriza por diferencial no lineal cuyas soluciones reflejan la existencia de solitones tipo kink y solitones tipo antikink. La diferencia entre estas soluciones es que existe una diferencia en el giro o rotación en sentidos contrarios a las agujas del reloj.

#### Referencias Bibliográficas

- [1] A. Hasegawa and F. Tappert, Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers Applied Physics Letter, Vol.23, 1973, pp. 142-144.
- [2] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon, "Experimental Observation of

- Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers", Physical Review Letter, Vol. 45, 1980, pp. 1095-1098.
- [3] Y.V. Kartashov, V. A. Vysloukh, and L. Tornes, "Soliton Control in Chirped Photonics Lattices", Journal of the Optical Society of America B, Vol. 22, No. 7, 2005, pp.1356-1359.
- [4] M. G. Banaee and J. F. Young, "High Order Soliton Break up and Soliton Self-frequency Shifts in a Micro-structured Optical Fiber", Journal of the Optical Society of America B, Vol. 23, No. 7, 2006, pp. 1484-1489.
- [5] B. Li and Y. Chen, "On Exact Solution of the Nonlinear Schrodinger Equations in Optical Fiber", Chaos, Solitons and Fractals, Vol.21, 2004, pp. 241-247.