# ALGUNOS MÉTODOS DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE LAS ROTACIONES DE UN CUERPO RÍGIDO, PARTE I

## SOME METHODS TO REPRESENT MATHEMATICALLY ROTATIONS OF A RIGID BODY, PART I

CÉSAR A. CASTELLANOS G.
CARLOS A. SUÁREZ F.

**Resumen**

Este artículo como revisión de tema, está concebido en tres Partes de las cuales se expone la Parte I en esta publicación, consistente en la Representación Matricial de las Rotaciones de un Cuerpo Rígido. En la Parte II se expondrá la Representación por Cuaterniones, y en la Parte III se aplican estas representaciones para la obtención de la Dinámica y Cinemática de un Cuerpo Rígido (Ecuaciones de Euler). En la Parte I se incluye también un análisis de las Matrices Angulo-Eje de Euler. La importancia de estas representaciones está en su aplicación al problema de la Actitud presente en el área de la Robótica, Sistemas de Navegación y Guía, y Sistemas Satelitales.

**Palabras clave:**

Actitud, Cuerpo Rígido, Rotaciones, Matrices de Rotación.

**Abstract**

This Article as a review of a theme, is conceived in 3 parts of which Part I is exposed in this publication, and consists in the Matrix Representation of Rotations of a Rigid Body. In Part II the Cuaternion representation will be presented, and in Part III these two representations will be applied to obtain Dynamics and Kinematics of a Rigid Body (Euler Equations). In Part I it is included the Angle-Axis Euler Matrix Representation. The importance of these representations lies on its application to the problem of Attitude, present in areas such as Robotics, Navigation and Guidance, and Satellite Systems.

**Key words:**

Attitude, Rigid Body, Rotations, Rotation Matrices.

## Introducción

Para determinar la Orientación de un cuerpo rígido [1], independientemente de su estado de movimiento traslacional y los movimientos rotacionales del mismo, se define el concepto de Actitud [2] , [3] como la orientación respecto de marcos de referencia o Sistemas Coordenados adecuados en algún punto de su trayectoria traslacional, o en cada punto de la misma. Como las trayectorias son una función del tiempo, la Actitud en consecuencia también es una función del tiempo. El problema de determinar la Actitud [5] y posterior o simultáneamente controlarla [3], se presenta en diversos campos de la tecnología como son la Robótica, Sistemas de Navegación y Guía, Sistemas Satelitales. Se hace entonces necesario un modelamiento matemático preciso de la Actitud, es por ellos que en este artículo se presenta como parte I, una de las representaciones de las rotaciones y su Actitud asociada. En la parte II se expondrá otra representación de las rotaciones muy utilizada en la actualidad por sus beneficios en cuanto a facilitar el cálculo de la Actitud y/o la precisión y el bajo costo computacional que puede lograrse con esta representación, esta es la denominada representación por Cuaterniones [2],[4]. Finalmente en una 3ª publicación se expondrá la parte III, sobre la aplicación de estas representaciones a la obtención de la Dinámica del Cuerpo Rígido [1].

## Matrices de rotación

### Algunas Definiciones Relacionadas con la Rotación de Un Cuerpo Rígido

Un cuerpo rígido es aquel en el que las partículas que lo conforman preservan su distancia cuando este presenta movimientos de traslación o rotación. La rotación de un cuerpo rígido se puede entender como el movimiento del cuerpo alrededor de un eje que pasa por un punto fijo en cualquiera de este [2].

Supongamos un sistema coordenado $(x, y, x)$ inmóvil cuyo origen se encuentra en el punto fijo alrededor del cual rota el cuerpo rígido. Un vector de posición **r** de una de las partículas que componen el cuerpo se puede representar como la composición lineal o suma de tres vectores unitarios y ortogonales a lo largo de los ejes que definen este sistema coordenado. Estos tres vectores unitarios se denominan (**a1**, **a2**, **a3**), (ver figura 1):

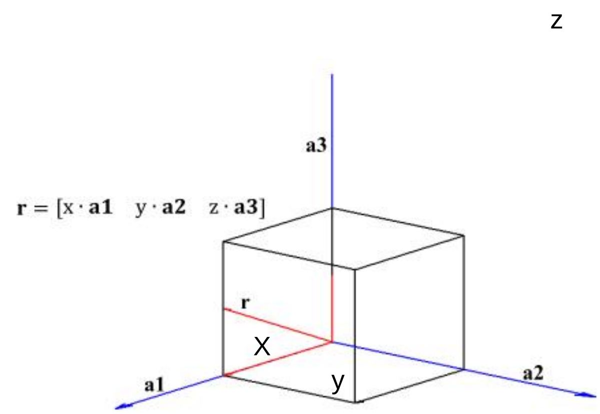


**Figura 1.** Cuerpo rígido en forma de cubo donde uno de sus vértices coincide con el origen de un sistema coordenado (x,y,z). La dirección de los ejes es la de los vectores (a1, a2, a3) respectivamente
**Fuente**: [2]

Una vez realizada la rotación del cuerpo rígido, si los vectores (**a1**, **a2**, **a3**) hubieran estado ligados al cuerpo, estos habrían sido transformados a otro conjunto de vectores (**b1**, **b2**, **b3**) igualmente unitarios y ortogonales (ver figura 2) que definirían un segundo sistema coordenado. Un vector determinado, en particular el vector de posición anterior puede ser representado igualmente desde cualquiera de los dos sistemas de referencia, en el sistema (**b1**, **b2**, **b3**) su representación la podemos denominar $\mathbf{r}'$. El problema esencial de encontrar la actitud del cuerpo es el siguiente: dados los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$, encontrar la transformación entre ambos sistemas coordenados (o entre las dos representaciones) [2].

En muchos problemas de Actitud se considera un sistema inmóvil o fijo, y otro móvil o en rotación respecto del sistema fijo.

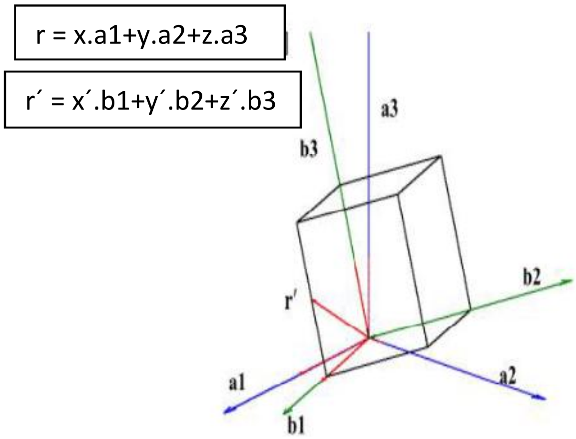


**Figura 2.** Problema de actitud sistema Fijo y móvil
**Fuente**: [2]

El vector de posición se puede representar utilizando dos marcos de referencia distintos rotados uno respecto del otro, con direcciones asociadas cartesianas (a1,a2,a3) y (b1,b2,b3). El vector puede estar fijo al cuerpo rotante o fijo en el sistema inmóvil y ser representado en el sistema fijo como r, y en el rotado como r'.

## Representación Matricial de las Rotaciones:

En **[2]** se considera un cuerpo rígido con una tríada de vectores unitarios ortogonales fijos al cuerpo **a₁, a2, a3** de modo que:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \qquad (1)$$

Lo cual es válido para cualquier permutación cíclica de los índices 1, 2, 3. El problema básico de la Actitud es especificar la orientación de esta tríada y por lo tanto la del cuerpo rígido relativo a un sistema coordenado de referencia que puede ser denominado $(x, y, z)$:

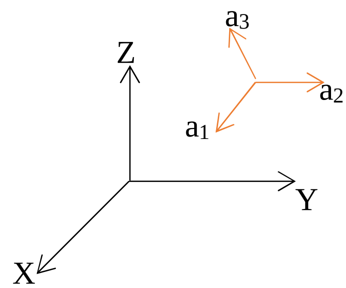


**Figura 3.** Sistema coordenado $(x, y, z)$ y una tríada de vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ rígidamente ligada al cuerpo rígido
**Fuente**: [2]

Especificando las componentes de cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ a lo largo de los tres ejes $(x, y, z)$ se determinará unívocamente la orientación o Actitud del cuerpo rígido. Esta especificación genera 9 parámetros o cantidades que pueden ser ordenados en forma de matriz así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Donde:

$\mathbf{a}_1 = [a_{1x} \quad a_{1y} \quad a_{1z}]$, $\mathbf{a2} = [a_{2x} \quad a_{2y} \quad a_{2z}]$ y $\mathbf{a}_3 = [a_{3x} \quad a_{3y} \quad a_{3z}]$ son las representaciones de los vector $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ en el sistema de referencia $(x, y, z)$.

Cada uno de los elementos $a_{ij}$ con $i = 1,2,3$ y $j = x, y, z$ es el coseno del ángulo entre un vector unitario ligado al cuerpo ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, o $\mathbf{a}_3$) y un vector asociado a un eje del sistema de referencia (x, y o z); en este sentido, $a_{1x}$ es por ejemplo el coseno del ángulo entre los vectores unitarios $\mathbf{a}_1$ y $\hat{\boldsymbol{x}}$. Por esta razón a la matriz **A** se la denomina como la **matriz de cosenos directores.** Los elementos de A no son todos independientes puestos que por ejemplo si tomamos a1 y a continuación a2, estos deben cumplir con lo siguiente:

$$a_{1x}^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2 = 1$$
$$a_{1x}\, a_{2x} + a_{1y}\, a_{2y} + a_{1z}\, a_{2z} = 0 \quad (3)$$

En general se cumple que:

$$\boldsymbol{a_i}.\boldsymbol{a_j} = \delta_{ij} \qquad (4)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

haciendo $j = 1, 2, 3$ equivalente a x, y, z .

Las ecuaciones (3) y (4) expresan la unitariedad y ortogonalidad de los vectores $\mathbf{a_k}$ . Igualmente Implica que:

$$AA^T = \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Donde **1** es la matriz identidad y el superíndice ($^T$) es la transposición.

Se puede concluir entonces de (5) que:

$$A^{-1} = A^T \qquad (6)$$

Es decir que la inversa de la matriz A es equivalente a su Transpuesta, de igual manera, A es una matriz real Ortogonal. Por otra parte se tiene que el determinante se define como:

$$\det(A) = \mathbf{a_1} \,.\, (\mathbf{a_2} \times \mathbf{a_3}) \qquad (7)$$

Entonces:

$$\det(A) = 1 \qquad (8)$$

Por lo tanto A es ortogonal y propia. El espacio de matrices que satisfacen las ecuaciones (7) y (8) es denominado "Grupo Ortogonal Especial" SO (3), [5] por sus siglas en inglés:

$$SO(3) = \{A \mid A \in R^{3\times 3}, A = I, \det(A) = 1\} \quad (9)$$

La matriz de cosenos directores es entonces una transformación de coordenadas que traza (maps) vectores en el marco de referencia (el inmóvil) al marco del cuerpo (el que gira). Si tenemos un vector **v** con representación en el marco de referencia (inmóvil):

Se define el vector $\mathbf{v} = [\,v_x\ \ v_y\ \ v_z]^T = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$, dimensión de $\mathbf{v} = \mathbf{3x1}$, Entonces $A\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, lo cual puede ser modelado como

$$\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\mathbf{x} \\ v_\mathbf{y} \\ v_\mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_\mathbf{1} \\ v'_\mathbf{2} \\ v'_\mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathbf{1}.\,\mathbf{v} \\ a_\mathbf{2}.\,\mathbf{v} \\ a_\mathbf{3}\,.\,\mathbf{v} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

De (5) se deduce que:

$$(AA^T)^T = A^TA = (\mathbf{1})^T = \mathbf{1} \qquad (11)$$

Multiplicando (10) a la izquierda por $A^T$ se obtiene que $A^T A\mathbf{v} = A^T \mathbf{v}'$, es decir que:

$$\mathbf{v} = A^T \mathbf{v}' \qquad (12)$$

Lo cual significa que la matriz de rotación inversa para transformar vectores (**v´**) representados en el marco rotado, a vectores (**v**) en el marco de referencia inmóvil es la matriz transpuesta de A, es decir $A^T$. Estas transformaciones Propias y Ortogonales expresadas en las matrices A preservan la longitud o magnitud de los vectores y los ángulos entre ellos, es decir generan rotaciones.

El producto A entre dos matrices $A_1$ y $A_2$ Propias y Ortogonales, $A = A_1 A_2$ es Propia y Ortogonal y representa una rotación compuesta de dos rotaciones sucesivas: primero $A_2$ y a continuación $A_1$.

Se puede demostrar que las matrices reales, propias y ortogonales, tienen al menos un vector propio $\vec{n}$ con valor propio igual a uno. Es decir existe un vector unitario $\hat{n}$, que no cambia bajo la transformación A:

$$A\hat{n} = \hat{n} \qquad (13)$$

Esto implica que el vector $\hat{n}$ tiene las mismas componentes a lo largo de los ejes ligados al cuerpo que a lo largo de los ejes del sistema de referencia fijo. Esto sólo es posible si $\hat{n}$ es coincidente con el eje de rotación. Esto demuestra el denominado Teorema de Euler [1], [2] que establece que: "El desplazamiento más general de un Cuerpo Rígido con un punto fijo, es una rotación alrededor de un eje que pasa por el punto inmóvil". Esto es cierto incluso cuando el cuerpo tiene también movimientos traslacionales, puesto que siempre habrá un marco de referencia donde la velocidad de al menos un punto del cuerpo sea nula.

La matriz de cosenos directores es la cantidad fundamental que especifica la orientación de un cuerpo rígido, pero no es la única parametrización posible de la orientación. A continuación se exponen otras dos parametrizaciones muy utilizadas.

### Otra Representación Matricial de Rotaciones: Matrices Ángulo – Eje de Euler [2]

Si se especifican como ejes de rotación ejes coincidentes con los de marcos de referencia, la matriz A en (2) para los ejes de rotación x, y, z se puede especificar como $A_x$, $A_y$, $A_z$, y si consideramos que la rotación es en cada caso en un ángulo igual de valor ϕ se obtiene:

$$A_x(\emptyset) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\emptyset) & sen(\emptyset) \\ 0 & -sen(\emptyset) & \cos(\emptyset) \end{bmatrix} \qquad (14)$$

$$A_y(\emptyset) = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset) & 0 & -sen(\emptyset) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen(\emptyset) & 0 & \cos(\emptyset) \end{bmatrix}$$

$$A_z(\emptyset) = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset) & sen(\emptyset) & 0 \\ -sen(\emptyset) & \cos(\emptyset) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general se cumple que la traza de A se expresa como:

$$Tr(A(\emptyset)) = 1 + 2\cos(\emptyset) \qquad (15)$$

En general los ejes de rotación no serán los ejes paralelos con marcos de referencia si no un eje con orientación cualquiera $\hat{n}$ (representado por ejemplo en el marco de referencia inmóvil x, y, z) y rotaciones respecto de este eje en un ángulo $\emptyset$ ( >0 si ccw, o regla de mano derecha alineando el pulgar con la dirección de $\hat{n}$). La matriz de cosenos directores para este caso, siendo la más general posible es expresada como:

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad A_3] \text{, con}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset) + n_x^2(1-\cos(\emptyset)) \\ n_x n_y(1-\cos(\emptyset)) - n_z sen(\emptyset) \\ n_x n_z(1-\cos(\emptyset)) + n_y sen(\emptyset) \end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} n_x n_y(1-\cos(\emptyset)) + n_z sen(\emptyset) \\ \cos(\emptyset) + n_y^2(1-\cos(\emptyset)) \\ n_y n_z(1-\cos(\emptyset)) - n_x sen(\emptyset) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} n_x n_z(1-\cos(\emptyset)) - n_y sen(\emptyset) \\ n_y n_z(1-\cos(\emptyset)) + n_x sen(\emptyset) \\ \cos(\emptyset) + n_z^2(1-\cos(\emptyset)) \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$A = \cos(\emptyset)\,\mathbf{1} + (1-\cos(\emptyset))\hat{n}\hat{n}^T - sen(\emptyset)\mathbf{N} \qquad (17)$$

Donde se cumple que:

La matriz identidad se identifica por **1** y el producto **externo** entre vectores con dim=3x3 es:

$$\hat{n}\hat{n}^{T} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} [\, n_x \;\; n_y \;\; n_z ] =$$

$$\begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Siendo **N** dado por:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

**N** es una matriz antisimétrica ($N = -N^T$), que por ejemplo actuando sobre un vector **v** genera un producto cruz dado por:

$$N\mathbf{v} \leftrightarrow \hat{n} \times \mathbf{v} \qquad (20)$$

**N** también se denota como $[\hat{n}\, x]$. Lo cual permite obtener la expresión (17) mediante la cual se deduce la denominada fórmula de Rotación (Goldstein), (ver figura 4).

$$\mathbf{r}' = \cos(\theta)\,\mathbf{r} + (1 - \cos(\theta))\hat{n}\hat{n}^{T}\mathbf{r} - sen(\theta)\hat{n} \times \mathbf{r} \qquad (21)$$

Para la transformación de un vector **r** que rota un ángulo $\theta$ alrededor de $\hat{n}$ en sentido horario (clock wise, cw). Por otra parte, la Transpuesta de A se define como:

Tr(A) = $a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}$ . En general Tr(A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ si la dimensión de A = nxn

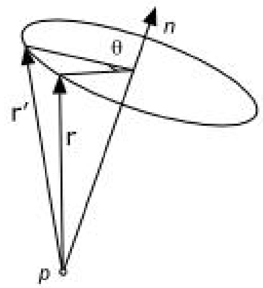


**Figura 4.** Vectores de posición r, r', y eje de rotación n
**Fuente:** [1]

La expresión (16) podemos interpretarla como una parametrización de A = A $(\emptyset, \hat{n})$; con parámetros $(\emptyset, \hat{n})$, [5]; y con base en ella expresar la matriz como una función exponencial y esta a su vez como un desarrollo en serie de potencias como a continuación se detalla:

Si B es una matriz entonces $e^{B} = \mathbf{1} + \boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{B}^3}{3!}$ **+……….**

Por otra parte, si $\phi\hat{n}$ es el producto del ángulo de rotación por el vector eje de rotación y teniendo en cuenta (18):

$$A(\phi\hat{n}) = \exp([\phi\hat{n}\, x]) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[\phi\hat{n}\, x]^p}{p!} \qquad (22)$$

A partir de esta expresión y definiendo $\widehat{w}(t)$ como la velocidad angular de rotación alrededor de $\hat{n}(t)$ en el instante t mediante:

$$\widehat{w}(t) = \frac{d\emptyset}{dt}\,\hat{n}(t) \qquad (23)$$

Manipulando algebraicamente (22) en forma similar a como se aplica con el concepto de cuaternión se puede obtener:

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = -[\boldsymbol{\omega}(t)\times]\cdot \boldsymbol{A}(t) \quad ; \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \qquad (24)$$

Lo cual representa el Marco Inmóvil mediante:

$$[\omega \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Usando la regla del producto en la diferenciación se puede establecer la relación entre las tasas de cambio de un vector en diferentes sistemas coordenados:

Si se cumple que:

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{v} \quad \text{con} \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}' = \mathbf{B}\mathbf{v}' \quad (26)$$

Entonces

$$\frac{d\mathbf{v}'(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{A}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad (27)$$

Teniendo en cuenta (24) y (26) se deduce que:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}'(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}'(t)}{dt} = -w(t) \times \mathbf{v}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}'(t)}{dt} \quad (30)$$

Estas expresiones serán de utilidad para describir la cinemática y dinámica de un cuerpo rígido.

## Conclusiones

La representación de las rotaciones por matrices permite en consecuencia deducir la dinámica de un cuerpo rígido, pero no es la única forma de representar rotaciones, existen otras representaciones como la que emplea el concepto de Cuaternión el cual tiene algunas ventajas respecto a la representación por Matrices de Rotación y que será expuesto en la próxima publicación.

## Referencias

[1] Landau, L.D. Lifshitz E.M., Mecánica, Vol.1, Curso de Física Teórica, Reverté, 1965.

[2] Wertz James R. *Spacecraft Attitude Determination and Control*, 2002.

[3] Wisniewski Rafael, Satellite Attitude Control Using Only Electromagnetic Actuation. Ph.d. Thesis, University of Aalborg, Department of Control Engineering 1997

[4] Crassidis, J. L. and F. L. Markley, "Unscented filtering for spacecraft attitude estimation," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 26, pp. 536-542, 2003.

[5] Bak T., *Spacecraft Attitude Determination - A magnetometer approach* in Ph.d. thesis, University of Aalborg, Control Engineering Department, 1999, pp. 23-65.

## INFORMACIÓN DE LOS AUTORES

**César A. Castellanos**: Ingeniero Electrónico – Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Colombia. Magister en ciencias exactas – Universidad Nacional – Colombia. Doctor (c) en Ingeniería – Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Colombia.
Profesor Titular – Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Colombia. cacastellanosg@udistrital.edu.co, divertech07@gmail.com.

**Carlos Suarez Fajardo**: Ingeniero Electrónico – Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Colombia. Licenciado en Matemáticas – Universidad Pedagógica Nacional – Colombia. Especialista en Instrumentación Electrónica – Universidad Antonio Nariño – Colombia. Especialista en Telecomunicaciones – Universidad Politécnica de Valencia – España. Master en Tecnologías, sistemas y redes de comunicación – Universidad Politécnica de Valencia – España. Doctor en Telecomunicaciones – Universidad Politécnica de Valencia – España.
Profesor Titular – Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Colombia. csuarezf@udistrital.edu.co, carsuafa@gmail.com.