



Características del cambio y la variación
asociadas al uso de recursos semióticos
en la generalización de patrones figurales:
una mirada desde la teoría de la objetivación



Andres Alberto Contreras Griego
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
aacontrerasg@correo.udistrital.edu.co

Resumen

El siguiente estudio documenta la identificación y descripción de las características sobre el cambio y la variación asociadas al uso de los recursos semióticos que emergen en las producciones de estudiantes de grado octavo en tareas de generalización sobre secuencias de patrones figurales. En ese sentido, se aborda a través de elementos de la Teoría de la Objetivación (TO) mediante un análisis multimodal del pensamiento, donde a partir de los mismos, se diseñaron, crearon, adaptaron e implementaron tres tareas de secuencias figurales con aspectos del contexto cultural del pueblo Guajiro, como los tejidos y el cultivo de maíz.

El análisis de los resultados vislumbra la emergencia del uso de recursos semióticos de objetivación mediante acciones corpóreas, mediadas por signos escritos, hablados y artefactos, con los cuales identifican las variables intervinientes gracias a la actividad multimodal (multisemiótica) con la gran riqueza y multiplicidad del uso coordinado y reducido de no sólo recursos cognitivos sino también físicos y perceptuales, mediante múltiples formas de expresión y representación y les permite encontrarse con características del cambio y la variación tales como: (I) lo que cambia y permanece constante; (II) reconocimiento de la variación; (III) la cuantificación del cambio; (IV) identificación de variables intervinientes; (V) el campo de variación o el universo de cada variable; (VI) relaciones de covariación en el nivel contextual y simbólico de generalización entre las cantidades intervinientes como procesos de objetivación.

Palabras clave

Cambio y variación, recursos semióticos de objetivación, generalización de patrones figurales, variables intervinientes, covariación.

Abstract

The following study documents the identification and description of the characteristics of change and variation associated with the use of semiotic resources that emerge in the productions of eighth grade students in generalization tasks on sequences of figural patterns. In this sense, it is approached through elements of the Theory of Objectification (TO) by means of a multimodal analysis of human thought (Radford, Edwards and Arzarello, 2009), where, based on them, three tasks of figural sequences were designed, created, adapted, and implemented with aspects of the cultural context of the Guajiro people, such as weaving and corn cultivation.

The analysis of the results shows the emergence of the use of semiotic resources of objectification through corporeal actions, mediated by written and spoken signs, and artifacts, with which they identify the intervening variables thanks to the multimodal (multisemiotic) activity with the great richness and multiplicity of the coordinated and reduced use of not only cognitive but also physical and perceptual resources, through multiple forms of expression and representation and allows them to encounter characteristics of change and variation such as: (I) what changes and remains constant; (II) recognition of variation; (III) quantification of change; (IV) identification of intervening variables; (V) the field of variation or the universe of each variable; (VI) covariation relationships at the factual, contextual and symbolic level of generalization between intervening quantities as processes of objectification.

Keywords

Change and variation, semiotic resources of objectification, generalization of figurative patterns, intervening variables, covariation.

Introducción

Esta investigación surge teniendo en cuenta que se hace mayor énfasis en el estudio de la aritmética y la geometría desde primaria con operaciones y resolución de problemas (Sánchez, 2013), planteados en libros de textos que se abordan con procedimientos repetitivos, sin ningún razonamiento más allá de reconocer problemas similares (Vergel y Rojas, 2018), sin ayudar a los estudiantes a identificar el cambio y la variación, con la ayuda de relaciones entre cantidades o variables intervinientes (Grupo Pretexto, 1999; NCTM, 2000; Vasco, 2002; Godino y Font, 2003; Posada et al., 2006; MEN, 2006; Blanton y Kaput, 2004, 2011; Sánchez, 2013; Cañadas y Molina, 2016; Caballero y Cantoral, 2017; Barajas et al., 2018; Zapatera, 2018a, 2018b; Vergel y Rojas, 2018; Carraher y Schliemann, 2019; Vergel et al., 2020; Radford, 2013, 2020b), y la dependencia de variables mediante procesos de generalización de patrones, como una herramienta potencial para motivar y fortalecer el desarrollo del Pensamiento Algebraico (PA) considerado como una de las formas fundamentales de abordar el álgebra en la escuela (Kieran, 1989; Azarquiel, 1993; Mason, 1996; Godino y Font, 2003; Godino et al., 2012; Radford, 2013; Vergel y Rojas, 2018), que les permita a los estudiantes “establecer relaciones y poner a prueba propiedades matemáticas promoviendo así la observación, predicción, modelación, argumentación, comprobación de hipótesis, entre otras, que acerquen a los estudiantes a expresiones de generalidad” (Vergel et al., 2020, p. 68).

De igual manera, el álgebra en secundaria se aborda como manipulación y operaciones numéricas de letras y números, sin dar significados a dichas expresiones simbólicas, es decir, los estudiantes encuentran dificultades asociadas al uso del simbolismo alfanumérico del álgebra y al significado que se les asigna al mismo en contextos matemáticos (Grupo Pretexto, 1999; Rojas y Vergel, 2018; Vergel y Rojas, 2018).

Por otro lado, a nivel curricular esta propuesta es fundamental, debido a que, en varios países se considera el estudio del cambio y la variación junto a los procesos de generalización de patrones importantes en la formación de

los estudiantes desde muy tempranas edades, como el caso de España, Canadá, Australia, Costa Rica, Chile, Corea y Singapur (Zapatera, 2018a), Estados Unidos (NCTM, 2000) y Colombia (MEN, 2006; Vergel y Rojas, 2018).

Finalmente, se comparte el hecho de que en los salones de clases de matemáticas se desconocen las producciones de los estudiantes, cuando abordan tareas matemáticas, en concreto se hace referencia a aquellas que no se perciben a simple vista, cuando construyen argumentos, explicaciones o razonamientos y formas de pensar al trabajar con ideas matemáticas, a través del lenguaje corporal, potencializado con el discurso (oral, escrito) y los gestos (Posada et al., 2006; Vergel, 2016; Vergel y Rojas, 2018; Rojas y Vergel, 2018; Vergel et al., 2020).

De esta manera, uno de los enfoques en la educación matemática se basa en la perspectiva semiótica-cultural de la TO de Radford (2006b, 2018a, 2020a), en la cual se soporta esta investigación, dado que brinda herramientas y una mirada sociocultural, para lograr identificar y describir las características del cambio y la variación asociadas al uso de los recursos semióticos que emplean, piensan, usan y movilizan los estudiantes para expresar ideas y PA como una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, evidenciada en los gestos, el lenguaje natural, las acciones y los artefactos (Vergel, 2014, 2016), abordada mediante una actividad multimodal del pensamiento humano (Radford et al. 2009) en el contexto de secuencias de patrones figurales, como aquellas secuencias numéricas apoyadas en figuras (Lasprilla, 2014).

Sobre la Teoría de la Objetivación (TO)

La TO según Radford (2020b), es una teoría educativa de corte histórico-cultural inspirada en la psicología de Vygotsky y la teoría de la actividad de Leontyev que “[...] busca comprender la acción de los sujetos según los límites y posibilidades que ofrece su marco social, político, histórico y cultural” (p. 18), y generar actividades ricas en saberes y transformaciones de los individuos implicados, en las cuales se manifiesten procesos sensibles, sensoriales, poéticos, críticos de encuentro con el saber cultural, donde el aprendizaje es “una acción reflexiva particular mediada por artefactos, que permite a los individuos darle significado, recurriendo a MSO, a los objetos matemáticos histórica y culturalmente constituidos” (Asenova, D’Amore, Fandiño, Iori y Santi, 2020, p. 45). Dichos objetos según Vergel et al. (2020), son simbólicos, abstractos y las distintas formas semióticas de representarlos son

importantes para comprenderlos, como aquel contenido que no es más que, el saber cultural-histórico y socialmente constituido en un momento dado y que se aprende entrando en una cultura (Radford, 2020b), donde el saber “es algo que está en la cultura y que podemos (o no)” (Radford, 2020a, p. 20), encontrarlo mediante procesos de objetivación, donde se elaboran activamente significados (2006b), para ello debe aparecer poniéndolo en movimiento mediante la actividad (2020a), con la cual “se materializa, re-produce, se transforma en objeto de conciencia” (p. 26), por medio del uso de artefactos, signos y formas de dialogo e interacción humana, social, colectiva, histórica y culturalmente constituidas, aquí el pensamiento según Vergel (2014), “es una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos” (p. 58), signos como “cualquier cosa que pueda considerarse como sustituto significativo de cualquier otra cosa” (Eco, 2000, p. 2), que “cumple el papel de una operación significativa [...] no se limitan únicamente a su función representativa, la elección de ellos no es neutra o independiente [...] orientan el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación” (Vergel, 2014, p. 66). En ese sentido, el gesto es el “signo visual inicial en el que la escritura futura del niño está contenida como el roble futuro está contenido en la semilla [...] es un escrito [signo] en el aire y el signo escrito es con frecuencia simplemente un gesto fijo” (Vygotsky, 1997, p. 133).

Es decir, siguiendo a Vergel (2019), para comprender lo que nuestros estudiantes nos quieren comunicar al expresar semióticamente las generalizaciones que producen, adquiere sentido “la idea de semiótica como una teoría que intenta explicar cómo los signos significan, es decir, una teoría de la comunicación y significación” (Eco, 1988; citado por Vergel, 2019, p. 2). Aquí el signo y la manera en que se usan objetivan al objeto conceptual (Lasprilla, 2014), como todos los elementos que ayudan a acceder a un objeto, estableciendo relaciones en forma de puente entre sí para elaborar pensamiento emergente, proporcionar significados culturales gracias a la mediación de signos y artefactos, mediante los recursos o medios semióticos de objetivación (MSO) que según Radford (2003), son todos los signos, herramientas, objetos y dispositivos lingüísticos usados con intención en los procesos de producción de significados sociales para lograr.

Estos recursos o MSO son “artefactos que median la actividad reflexiva [...] del aprendizaje” (Asenova et al., 2020, p. 41), según Vergel et al. (2020), son una amplia gama de medios físicos y sensoriales movilizados para

dar forma tangible al pensamiento convirtiéndolos en constituyentes del acto cognitivo, de la actividad matemática misma, mediante procesos de objetivación que para Radford (2018a), son “procesos activos, encarnados, discursivos, simbólicos y materiales a través de los cuales los estudiantes se encuentran, notan y se familiarizan críticamente con el sistema de pensamiento, reflexión y acción constituidos histórica y culturalmente [saber]” (p. 75). De igual manera, “es notar algo culturalmente significativo, algo que se revela a la conciencia [...] por medio de la actividad corpórea, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica” (Radford, 2020a, p. 20). Para describirlo e interpretarlo se puede acudir a los procesos del nodo semiótico, la iconicidad y la contracción semiótica (Radford y Sabena, 2015).

Sobre las características del cambio y la variación en secuencias figurales

De acuerdo con el MEN (2006), el Pensamiento Variacional (PV) “tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos” (p. 66), y el estudio de los patrones está relacionado con “[...] la coordinación de los cambios de una magnitud Y con cambios de una magnitud X, con una aproximación al concepto de función como dependencia funcional entre magnitudes variables” (p. 67), además para Caballero y Cantoral (2017), el cambio es toda modificación cualitativa o cuantitativa de estado y la variación es cuantificar el cambio en las variables del fenómeno que están relacionadas causalmente y la variación hace referencia a determinar la manera como una o más cantidades de magnitud varían en relación con la de las otras, es decir, apreciar como covarían dos o más cantidades de magnitud, de tal manera que el cambio en una o algunas, genere cambio(s) en la(s) otra(s) (Blanton y Kaput, 2004; MEN, 2006; Posada et al., 2006; Sánchez, 2013; Cañadas y Molina, 2016).

La co-variación, siendo el objeto principal del PV (Vasco, 2002), es “generada por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico-cultural [...] dentro de las condiciones particulares de cada cultura y de cada forma de comprender el mundo” (Vergel, 2014, p. 58), más aún, es un patrón de la “actividad reflexiva incrustada en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (Radford, 2006b, p. 111), sobre los modos de acción, expresión y reflexión de “formas matemática de ver, [pensar] y percibir las figuras en términos de

variables y su relación - una co-variación" (Radford, 2020b, p. 24), relacionada con el número de cada término y el número de elementos del mismo o de cualquiera en la secuencia, donde "se espera que los estudiantes muestren las posibilidades para comprender patrones en forma covariacionales desarrolladas histórica y culturalmente y emplearlos para responder aspectos de términos lejanos o no especificados" (Radford, 2011, p. 23).

Se comparte con Radford (2013), que la generalización de patrones es uno de los procedimientos principales de producción del conocimiento, que está constituido de tres problemas fundamentales y relacionados: El fenomenológico, el epistemológico y el semiótico. En el primero se fija en la dimensión numérica y/o espacial de los términos; en el segundo se identifica una propiedad o característica común entre los términos de la secuencia y establece una manera de encontrar algunos términos cercanos o lejanos; finalmente que logren establecer una fórmula que emerja en la acción y el lenguaje para aplicarla a cualquier término específico, como una relación de covariación, la cual es potente, con o sin límites, porque puede que las variables en sí aparezcan o no, como objeto de discurso, pueden aparecer instanciadas en algunos de sus valores o en todos, de forma implícita o explícita (2010a, 2018b), con la ayuda de MSO o combinación de ellos, es decir, mediante múltiples formas de expresión y representación. De igual manera, la generalización algebraica de secuencias figurales se refiere a: (I) tomar conciencia de una propiedad o característica común, (II) generalizarla a todos los términos subsecuentes de la secuencia y, (III) ser capaz de usarla para deducir una expresión directa para calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

Por ello, para caracterizar el cambio y la variación, se tomaron como referencia inicial dichas características y elementos de autores como MEN (2006), Cañadas y Molina (2016), Vergel et al. (2020), tales como: (I) lo que cambia y permanece constante [reconocimiento de la variación]; (II) las variables intervinientes [dependiente-independiente]; (III) el campo de variación de cada variable [variación conjunta] (IV) las posibles relaciones entre esas variables mediante su representación simbólica o expresión semiótica, en el proceso de objetivación de la relación de covariación entre las cantidades intervinientes. Además, el Grupo Pretexto (1999), sugiere que: (1) la variable pertenece a un universo de donde interpretarla, el cual, sin ser tiempo, está implícitamente connotado de éste.

Es decir, el tiempo se imbrica al universo de la variable, ajustándose a su cardinalidad y a su estructura; (2) variar hace referencia a que la variable es una representación, indistinta y simultánea de los individuos de su universo; (3) aparece siempre en una expresión sobre la relación de dependencia destacada entre los individuos de su universo, expresada por una relación funcional que constituye el pegamento que permite expresar el cambio ocurrido [y], en el momento [x].

Metodología

La investigación se hizo con estudiantes de grado octavo, de la IESRA, ubicada en el municipio de Albania, La Guajira, donde no se contaba con herramientas tecnológicas, ni acceso a internet, en el contexto de confinamiento por efectos de COVID-19, sin la alternancia y bajo ambiente de trabajo en casa. El diseño se basó en una investigación de enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Ernest, 1991, citado por Vergel, 2014), con una rica descripción del problema didáctico bajo estudio sobre las formas de acción, expresión y reflexión, usando la metodología multisemiótica propia de la TO (Radford y Sabena, 2015), para ello se adaptaron las fases propuestas por Radford (2010b, 2015) en cuatro fases:

- **(I) Diseño y justificación de las tareas:** Se realizó una revisión en la literatura de tres tareas de generalización sobre secuencias de patrones figurales que fueron adaptadas, creadas, justificadas, validadas con juicio de experto mediante triangulación entre pares.
- **(II) Implementación de las tareas:** Se usó una muestra de cuatro estudiantes y se les enviaron las 3 tareas por WhatsApp con un audio para abordarlas, grabación de cada video, la toma de la fotografía de las hojas de trabajo y su envío, usando un celular y se les pidió la grabación explicativa de la tarea, como estrategia para vislumbrar MSO fundamentales como el habla, entre otros. Ellos se mostraron tímidos y no se pudo grabar su rostro, se optó por grabar solo los gestos de las manos, para evitar condicionar la actividad (Ramírez, 2017), como sugiere Vergel y Rojas (2018), que se debe rastrear lo que los estudiantes quieren comunicar a través de los signos que usan. Esta se había tomado inicialmente como prueba piloto, pero, dado que no se pudo dar la alternancia se tomó la decisión de tomarlos como información para constituirlos como datos para la investigación.

- **(III) Recolección y construcción de los datos:** Se recibieron 10 hojas de trabajo que se transcribieron en su totalidad (Radford, 2015; Radford y Sabena, 2015), se eligieron 25 episodios útiles para responder la pregunta de investigación (Radford y Sabena, 2015), de acuerdo con el criterio del foco teórico partiendo de la pregunta, los objetivos y los elementos analíticos y conceptos propios de la TO (Vergel, 2014). Se tomaron fotos donde se evidenciaron MSO, y se agregó en las transcripciones la interpretación del investigador. Adicionalmente se usó una codificación abierta o inicial (Glaser & Strauss, 1967; citado por Vergel, 2014), resaltando con colores y subrayando en las sentencias frases, indicios y expresiones que muestren recursos o MSO, con color rojo lo referente al ritmo; con rojo oscuro la actividad perceptual; los signos deícticos lingüísticos (espaciales, temporales y de modo) de azul claro, verde claro y naranja respectivamente; los recursos lingüísticos de verde oscuro, las relaciones de covariación subrayando las frases de rojo y en negrita las palabras o frases clave y los símbolos.
- **(IV) Análisis de datos:** Se tuvo en cuenta los distintos MSO, como sus relaciones, la dialéctica y su vínculo con las relaciones de covariación existentes entre las cantidades. Haciendo una confrontación del análisis en detalle con supuestos teóricos gracias a la triangulación de los datos, con la concepción multimodal del pensamiento humano donde se puedan articular y analizar la gran variedad de recursos cognitivos, físicos y perceptivos que piensan, emplean y usan los estudiantes al abordar y expresar ideas matemáticas, como el lenguaje natural y escrito, dibujos, gestos, la manipulación de artefactos físicos, electrónicos y el movimiento corporal (Radford et al., 2009). A continuación, se presenta el análisis de los episodios de acuerdo con las producciones de los estudiantes Diego, José y Javier en la tarea 1.

Análisis de la producción de Diego

Figura 1

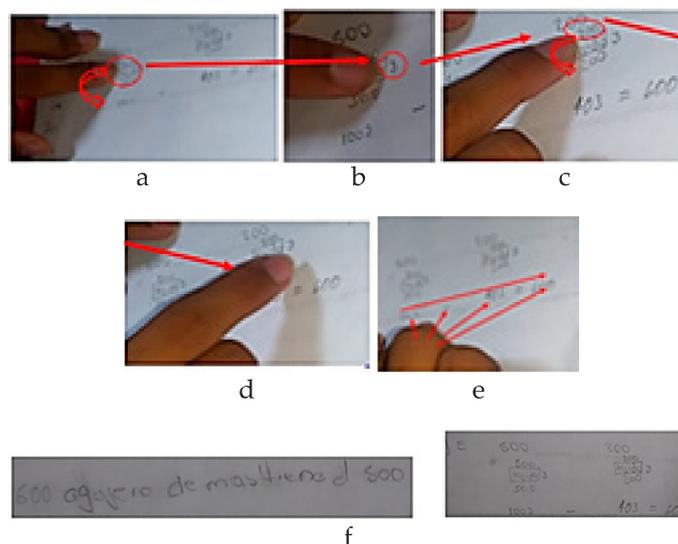
Producción de Diego de los ítems [e y f] de la tarea 1.

L1: Diego (Ítem e): 600 agujero más tiene el 500. ¿Por qué?, porque aquí sabía que tengo que hacer 500 arriba [señala o apunta el “500” ubicado arriba de su tejido, ver imagen 1a, y se desliza hacia abajo de su tejido], y 500 abajo [señala o apunta el “500” ubicado abajo de su tejido, ver imagen 1a, y se desliza hacia la parte derecha de su tejido, ver imagen 1b], y quedé

debiendo 3 [señala o apunta el valor 3 en la parte derecha de su tejido, ver imagen 1b]. En el 200 también 200 arriba [señala o apunta el “200” ubicado arriba de su tejido “200”, ver imagen 1c, y se desliza hacia abajo de su tejido, ver imagen 1c], y 200 abajo [señala o apunta el tejido representado en la parte de abajo en el valor 200, ver imagen 1c, y se desliza hacia la derecha de su tejido “200”, ver imagen 1b], y quedé debiendo 3 [señala o apunta el valor 3 en la parte de debajo de su tejido “200”, ver imagen 1d]. Bueno, aquí sume 500 más 500 serían 1000 más el 3 serían 1003, 200 más 200 serían 400 más el 3 serían 403. Bueno aquí le resté 1003 menos 403 y me dio 600 [señala o apunta y emplea un signo deíctico lingüístico espacial “aquí” y se desliza de izquierda a derecha de forma continua primero sobre el valor “1003” luego el signo menos [-], y finalmente sobre el valor “403” hasta llegar a su respuesta “600”, ver imagen 1e]

Imagen 1

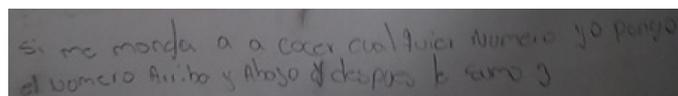
Producción semiótica de Diego en el ítem e de la tarea 1.



L2: Diego (Ítem f): Si me mandan a coser cualquier número yo pongo el número arriba y abajo y después le sumo tres [imagen 2].

Imagen 2

Producción escrita de Diego en el ítem f de la tarea 1.



Cuando Diego en (L1) dice “[...] aquí sabía que tengo que hacer 500 arriba y 500 abajo y quedé debiendo 3. En el 200 también 200 arriba y 200 abajo y quedé debiendo 3 [...]”; y en (L2) “Si me mandan a coser cualquier número yo pongo el número arriba y abajo y después le sumo 3”, vemos como del habla funge un arsenal o repertorio lingüístico (Radford, 2011), a través de palabras y frases claves junto a signos deícticos lingüísticos espaciales [aquí, arriba, abajo],

temporal [después], recursos lingüísticos [coser, debiendo], de esta forma mediante el adverbio “aquí” en (L1) pone su atención, percibe y fija su mirada, que no es para nada desinteresada (Radford, 2013), en el artefacto construido del tejido, entre tanto usa los adverbios “arriba y abajo” en (L1 y L2) para percibir, identificar y relacionar la cantidad de agujeros que cambia (MEN, 2006), de un tejido al otro; por su parte con los recursos “debiendo” en (L1) lo asocia a una diferencia para determinar la cantidad de agujeros ubicados en la parte derecha del tejido y que en su percepción no cambia de un tejido al otro, que es constante (MEN, 2006), los cuales además brindan a las variables un significado profundo en relación a las pistas [formas] espaciales o contextuales (Radford, 2018b), que le permiten así mismo, identificar y relacionar ambas variables.

El adverbio “después” y el recurso “coser” en (L2) “Si me mandan a coser cualquier número yo pongo el número arriba y abajo y después le sumo 3”: el primero le permite describir acciones y procedimientos potenciales que emprende de forma reiterada e imaginaria (Radford, 2003); el segundo lo asocia con la acción humana de tejer. Todos estos elementos textuales forman parte de formas de expresión u oralidad cultural e históricamente adquiridas que entran a colaborar en los procesos de toma de conciencia, significación y comunicación del estudiante, a la hora de identificar y relacionar las variables intervinientes.

Entre tanto el uso de gestos indexicales mediante señalamientos o apuntamientos y deslizamientos (imagen 1) siendo estos escritos en el aire (Vygotsky, 1997), usados para materializar las intenciones de Diego, a la hora de coordinar la estructura numérica y espacial para indicar qué, cómo y cuánto cambian las variables o cantidades (MEN, 2006; Caballero y Cantoral, 2017), además para identificarlas y relacionarlas mediante su recurso semiótico del tejido mostrando la manera como percibe los agujeros que están fuera de su campo perceptual y la forma [estructura espacial] como están dispuestos los tejidos en la secuencia.

Con respecto a la actividad perceptual, Diego a través de sus frases (L1) “[...] aquí sabía que tengo que hacer [...]”, aflora como un recurso semiótico (Vergel, 2014; Moreno, 2018), no solo en un dibujo y el lenguaje escrito, sino además en el habla y los gestos a la hora de identificar y relacionar las variables presentes. El ritmo por otra parte emerge en (L1) cuando dice “[...] más [...] serían [...] más el 3 serían [...], [...] más [...] serían [...] más el 3 serían [...]”, le permite

al estudiante, “resaltar la monotonía de sus acciones de contar, pausar y adicionar” (Vergel, 2014, p. 177), y “crea la expectativa de un próximo evento” (You, 1994; citado por Vergel 2014, p. 124), da la impresión de notar ¿cuál será su próxima acción, operación y procedimiento?, que brota y es fundamental en el proceso de encuentro con el conocimiento (Radford y Sabena, 2015), dado que ayuda a mediar y materializar sus pensamientos (Radford, 2006a; Asenova et al., 2020), en la manera como se manifiestan sus acciones, a la hora de contar rítmicamente (Lasprilla, 2014), para mostrar como cambiaban los agujeros de un tejido al otro mediante relaciones entre números, para sus operaciones y afirmar su actividad perceptiva a la hora de indicar la coordinación de ambas estructuras, con su uso da la impresión de notar cuál será su siguiente acción, operación y procedimiento.

Además, en (L1) afloran conteos de forma subitizada, los cuales le ayudan a verbalizar, tomar conciencia e identificar una relación (Radford, 2011), de covariación entre las cantidades intervinientes, explicando que los agujeros están divididos dependiendo del número del tejido, es decir, a explicar una estructura espacial percibida, de acuerdo con Radford (2013), Diego ha escogido una característica común, gracias a que en su percepción la estructura numérica y espacial son relacionadas, cuando coordina múltiples recursos semióticos de forma sincrónica, tales como, la acción lingüística cuando dice en (L1) “[...] tengo que hacer 500 arriba y 500 abajo y quedé debiendo 3. En el 200 también 200 arriba y 200 abajo y quedé debiendo 3. Bueno, aquí sume 500 más 500 serían 1000 más el 3 serían 1003, 200 más 200 serían 400 más el 3 serían 403 [...]”, usando un artefacto como recurso icónico o representación figural del tejido (figura 2, imagen 1f), junto al lenguaje escrito (imagen 1), que “[...] es con frecuencia simplemente un gesto fijo” (Vygotsky, 1997, p. 133), que se convierten en su centro de atención, acción, producción para mediar su pensamiento y actividad reflexiva (Radford, 2006a; Asenova et al., 2020), movilizandolos gestos indexicales como señalamientos o apuntamientos y deslizamientos (imagen 1) siendo escritos en el aire (Vygotsky, 1997), la actividad perceptual, conteos rítmico en (L1, imagen 1e) “[...] Bueno, aquí sumé 500 más 500 serían 1000 más el 3 serían 1003, 200 más 200 serían 400 más el 3 serían 403 [...]”, de forma subitizada y el ritmo, los cuales le permiten a Diego percibir e identificar las variables intervinientes a saber: número del tejido y de agujeros, notar que los tejidos “pueden considerarse como compuestos de partes notables. El conteo de las partes notables se basa en la

identificación de las variables adecuadas y su correlación” (Radford, 2020b, p. 22).

Aquí las “partes notables”, Diego las percibe e identifica a través de dicha coordinación de recursos semióticos, estableciendo dicha correlación, indicando que existe el mismo número de agujeros arriba y abajo, igual al número del tejido solicitado, gracias al uso de deícticos espaciales “arriba, abajo” junto a gestos indexicales y signos escritos, además ubica tres agujeros en la parte derecha para todos los tejidos, los cuales son identificados con el recurso lingüístico “debiendo” y mostrado con el apoyo de gestos indexicales.

Figura 2

Recurso semiótico del tejido 500 y 200 construido por Diego en el ítem e.

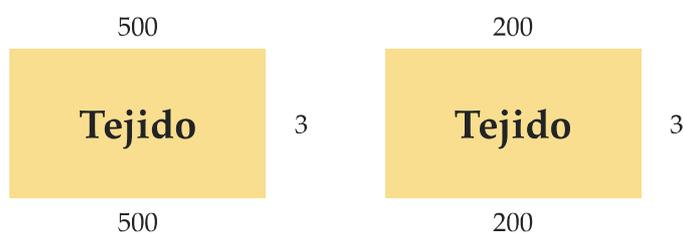
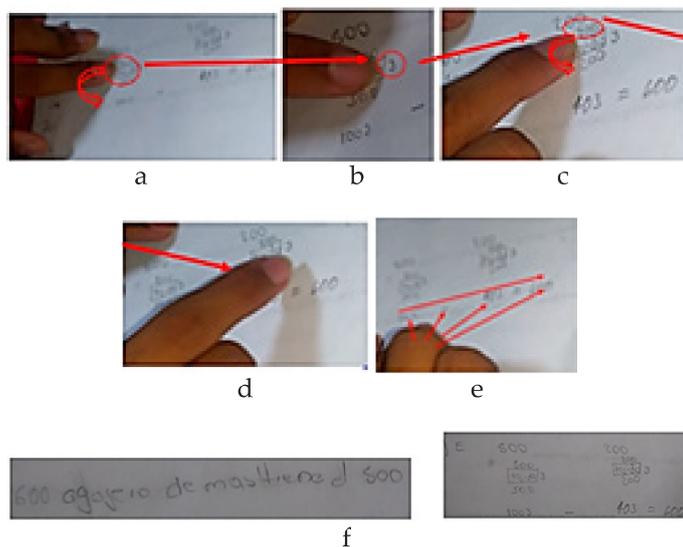


Imagen 1

Producción semiótica de Diego en el ítem e de la tarea 1.



Con relación a las estrategias para identificar y relacionar las variables intervinientes gracias a su producción semiótica son múltiples, inicialmente en formas corpóreas (Vergel y Rojas, 2018), con el uso de gestos indexicales (imágenes 5, 6 y 7), la actividad perceptual, el habla mediante (palabras, signos deícticos y recursos lingüísticos), el ritmo y conteos subitizados al coordinar o articular ambas estructuras; en segundo lugar, cuando manifiesta en (L1) “[...] aquí sumé

500 más 500 serían 1000 más el 3 serían 1003, 200 más 200 serían 400 más el 3 serían 403. Bueno aquí, resté 1003 menos 403 y me dio 600”, las variables y su relación permanecen implícitas, es decir, no hacen parte del discurso, dada la acción mediante números concretos y sus operaciones (Radford, 2010a, 2018b).

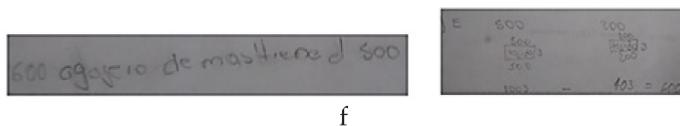
Aquí gracias a la acción de contar los agujeros de forma subitizada y rítmica, donde mediante el habla emplea fórmulas encarnadas en (L1) de forma directa, para los tejidos 200 y 500, así se refiere para el tejido 500: <<500 + 500 = 1000 + 3 = 1003>>; y para el tejido 200: <<200 + 200 = 400 + 3 = 403>>; y para hallar la variación entre ambos: “Bueno aquí le resté 1003 menos 403 y me dio 600 [escribe <<1003 - 403 = 600>>]”. En estos casos, sus acciones plantean esquemas operacionales movilizados que sugieren una forma subitizada de contar los agujeros de arriba y abajo cuando los separa en su recurso del tejido, usadas para otros tejidos lejanos, “este esquema permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como MSO [recursos semióticos]” (Vergel, 2014, p. 125), anexando tres agujeros que son constantes en la parte derecha de cada tejido.

Asimismo, cuando en (L1) dice “[...] tengo que hacer 500 arriba y 500 abajo y quedé debiendo 3. En el 200 también 200 arriba y 200 abajo y quedé debiendo 3 [...]” y en (L2) “Si me mandan a coser cualquier número yo pongo el número arriba y abajo y después le sumo 3”, las variables y sus relaciones permanecen explícitas, es decir, forman parte del discurso, mediante frases y palabras claves (Radford, 2010a, 2018b), junto con “elementos textuales: [signos] deícticos lingüísticos espaciales [como: arriba, abajo]” (Radford, 2018b, p. 23), y el recurso lingüístico “debiendo”, que median el pensamiento de Diego para producir significados y expresar fórmulas encarnadas, identificando y relacionando ambas variables intervinientes.

De esta manera, en (L1 y L2) en términos esquemáticos Diego ha forjado la relación directa escrita como <<x → x + x + 3>>, aunque claro, en ambos casos, él no utiliza letras todavía (Radford, 2013, 2020b), en el nivel contextual de generalización. Luego de escoger determinaciones sensibles o características comunes entre los tejidos, a través de la coordinación de las estructuras espacial y numérica (Radford, 2011, 2013; Callejo et al., 2016), establece una manera de encontrar cualquier término gracias a las partes notables notadas en su actividad multimodal mediada por el uso de recursos semióticos, signos y artefactos culturales.

Imagen 1

Producción semiótica de Diego en el ítem e de la tarea 1.



f

Además, gracias al uso de signos escritos mediante palabras y números (imagen 2) y la representación figural icónica del tejido como un artefacto, siendo el lenguaje escrito “[...] con frecuencia simplemente un gesto fijo” (Vygotsky, 1997, p. 133), y un recurso semiótico fundamental que emergen como otra estrategia para identificar y relacionar ambas variables. En este sentido, estos artefactos brotan como recursos semióticos en (L1, imagen 1), tal como lo expresa (Vergel, 2014, p. 127), “no es un mero recurso en el acto de conocer de los estudiantes. Funge como MSO en tanto media los actos intencionales” de Diego. Este es un aspecto para resaltar, en tanto reconoce la importancia del uso de una representación icónica, del tejido, como una estrategia adecuada y posible de representación para manipular e identificar lo indeterminado, la variable, dado que le permite operar con el número del tejido y su cantidad de agujeros, que no ha sido evidenciado en otros trabajos, estaríamos ante “una posibilidad, al parecer «natural», de trabajar con lo desconocido, con lo no determinado” (Vergel y Rojas, 2018, p. 89). De hecho, aquí el signo siguiendo a Vergel (2014, p. 66), “cumple el papel de una operación significativa [...] no se limitan únicamente a su función representativa, la elección de ellos no es neutra o independiente y [...] orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación”.

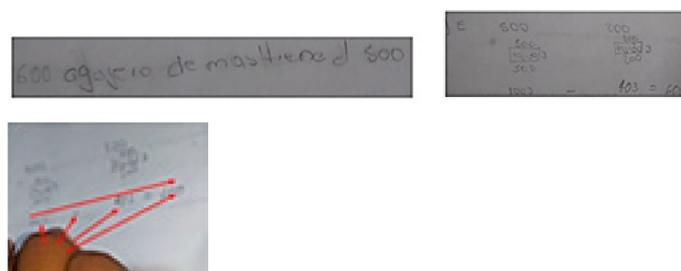
Lo anterior permite afirmar que Diego guía su actividad matemática con este recurso semiótico del tejido, como artefacto que materializa su forma de pensar y actuar para poder llegar a conocer, acceder al objeto y producir significados culturales gracias a la mediación de signos (Lasprilla, 2014), según Vergel (2014, p. 183), “estos instrumentos [artefactos] recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano”, dado que en su actividad perceptual cuando separa el recurso semiótico de los tejidos logra percibir la igualdad entre los agujeros de arriba y abajo, así como la cantidad de agujeros que cambia y permanece constante en la secuencia (MEN, 2006), en efecto, según Radford (2013), su mirada no es para nada desinteresada.

Cuando Diego mediante su acción lingüística-gestual-escrita, señalamientos y deslizamientos sobre el trabajo

con números concretos y sus operaciones responde en (L1, imagen 1) “600 agujero más tiene el 500 [...] Bueno aquí le resté 1003 menos 403 y me dio 600” y escribe <<1003 - 403 = 600>>”, se nota cómo cuantifica [cuánto] el cambio [cambia] de la variable interviniente (MEN, 2006; Caballero y Cantoral, 2017), a partir de un tejido de referencia hacia otro lejano, en este caso, del tejido 200 al tejido 500, lo que le ayuda a percibir y hallar el cambio como una modificación cuantitativa de estado (Caballero y Cantoral, 2017). (**Imagen1**)

Imagen 1

Producción semiótica de Diego en el ítem e de la tarea 1.



En todas las relaciones de covariación de acuerdo con Radford (2018b), “el lenguaje natural con su arsenal de posibilidades conceptuales ofrece el material semiótico para producirla” (p. 23). En ese sentido, “la atención se traslada a las variables y su relación, que, poco a poco, se convierte en el objeto central del discurso” (p. 16). Aquí la fórmula es “un ícono, una especie de descripción geométrica de una figura. [...] no es un resumen simbólico sino más bien una historia que narra, de forma muy condensada, la experiencia matemática de los alumnos. [...], es una narrativa” (Radford, 2010a, p. 10). Diego, tal como lo expresa Radford (2013, p. 12), “ha llegado a constituir fórmulas encarnadas en la acción y en el lenguaje y que se aplica a cualquier término particular [...] la encarnación de la fórmula en la acción y en el lenguaje natural es potente”, como relaciones de covariación donde las variables en sí aparecen y no, como objeto de discurso. En este caso se podría hablar de dos variables o cantidades intervinientes: el número del tejido y el número de agujeros. En suma, Diego de forma esquemática, gracias a la movilización y coordinación de múltiples recursos semióticos ha forjado las siguientes relaciones matemáticas cruciales para efectuar la generalización algebraica, aunque él no esté usando letras aún, que se pueden describir como:

1. $x \rightarrow 3$: el tejido x tiene 3 agujeros en la parte derecha.
2. $x \rightarrow 3$: el tejido x tiene x agujeros en la parte de arriba.
3. $x \rightarrow 3$: el tejido x tiene x agujeros en la parte de abajo.
4. $x \rightarrow x + x + 3$: el tejido x tiene $x + x + 3$ agujeros.

Las cuales de acuerdo con Radford (2020b), se manifiestan gracias al [los] proceso[s] de objetivación como formas de ver y percibir los tejidos en términos de variables y su relación, es decir, una co-variación que relaciona el número del tejido y el número de agujeros en la parte de arriba, abajo y derecha de este o de cualquiera en la secuencia. De este modo, vemos como el cambio aparece al considerar dichas relaciones de dependencia (Grupo Pretexto, 1999).

En ese sentido, Diego muestra su posibilidad para comprender patrones de forma co-variacional desarrollada histórica y culturalmente empleándolo para determinar términos lejanos o no especificados (Radford, 2011). Gracias a la mediación, materialización y el despliegue de gestos, palabras, percepción y recursos, produce un “significado multisemiótico que da sentido al proceso a través del cual aparece una forma algebraica de pensar la secuencia” (Radford, 2020b, p. 23), como un proceso de generalización en el cual se nota una manera relacional (Radford, 2011), de vincular el número del tejido con las partes pertinentes de ella, donde los tejidos son descompuestos en partes que tienen pistas importantes para que se produzcan relaciones algebraicas, en las que variados recursos semióticos se desarrollan de manera interrelacionada.

Figura 3

Producción de José en relación con los ítems [d y f] de la tarea 1.

L3: José (ítem d): Sería que no, **porque en esta secuencia solo existen** los números que ya sean el 5, el 7, el 9, el 11 y el 13 y **así** se van repitiendo y repitiendo.

Imagen 3

Producción escrita de José con relación a la pregunta del ítem d de la tarea 1.

R/No
Secuencia: $\rightarrow 5-7-9-11-13- \dots = \text{impares}$

L4: José (ítem f): Aquí es donde **se pone en práctica la fórmula** que sería **multiplicando por 2 [Pausa] n, que sería el número del tejido y sumándole 3 y entonces, la fórmula sería 2 por n más 3 y nos daría el número de agujeros.**

Imagen 4

Producción escrita de José en relación con la pregunta del ítem f de la tarea 1.

multiplicando por 2 n y sumándole 3 = fórmula
 $2 \times n + 3 =$

De esta forma, vemos como mediante la frase clave en (L9) “si me mandan a coser cualquier número yo pongo el número arriba y abajo y después le sumo 3”, trabaja

con una forma reducida de expresión, evidenciándose un proceso de objetivación de contracción semiótica (Lasprilla, 2014), dado que hay evolución de nodos semióticos (Radford, 2010a), es decir, aquí hay una reorganización de los recursos semióticos que ayudan al sujeto a dirigir su atención a aquellos aspectos que parecen ser más significativo (Radford, 2018b). En ese sentido, el recurso semiótico del tejido como artefacto se convierte en un recurso semiótico importante que le ayuda, entre otros aspectos para contar los agujeros de arriba, abajo que son iguales y de la derecha, según Vergel (2014, p. 125), “en este proceso de semiosis perceptual, la actividad de coordinación de [signos] déicticos lingüísticos espaciales” como (aquí, arriba, abajo), el recurso lingüístico (debiendo) a través de sus frases, gestos indexicales (señalamientos o apuntamientos y deslizamientos), el ritmo, conteos de forma subitizada, lenguaje verbal, escrito y la actividad perceptual, evidencia un nodo semiótico que caracteriza la actividad reflexiva de Diego mediada por estos recursos semióticos.

Asimismo, gracias a la experiencia encontrada en (L1, imagen 1) “[...] tengo que hacer 500 arriba y 500 abajo y quedé debiendo 3. En el 200 también 200 arriba y 200 abajo y quedé debiendo 3. Bueno, aquí sume 500 más 500 serían 1000 más el 3 serían 1003, 200 más 200 serían 400 más el 3 serían 403 [...]”; aborda en (L2, imagen 2) “Si me mandan a coser cualquier número yo pongo el número arriba y abajo y después le sumo tres”; según Radford (2013), utiliza dicha característica identificada y la aplica para determinar el número de agujeros para otros tejidos más lejanos, tal y como lo reporta Lasprilla (2014), se evidencia la presencia de la iconicidad como proceso de objetivación, como una forma de notar aspectos similares encontrados en una experiencia previa, para favorecer el nuevo procedimiento. Vemos que José a través de su acción lingüística-perceptiva-escrita en la sentencia (L3, imagen 3) cuando dice “sería que no, porque en esta secuencia solo existen los números que ya sean el 5, el 7, el 9, el 11 y el 13 y así se van repitiendo y repitiendo”, de la cual emerge un déictico de modo “así se van repitiendo y repitiendo”, usado para indicar la forma, manera o el modo en la que cambia la estructura numérica y cómo se cumple esta propiedad para todos los términos de los tejidos, y que su comportamiento permanece igual, además de la actividad perceptual, el uso de signos escritos (palabras, símbolos matemáticos), le ayuda a identificar una característica fundamental en el comportamiento o la estructura numérica de la secuencia de número de agujeros, percibiendo a partir de la relación recurrente

(+2) para establecer y determinar que no existe ningún tejido que tenga 3124 agujeros (números pares), dado que la identifica como una secuencia donde esta variable solo posee números impares, discretos en el conjunto de números naturales. De acuerdo con el Grupo Pretexto (1999), José ha identificado que la variable “número de agujeros” pertenece a un universo de donde interpretarlo o el campo de variación de la variable (MEN, 2006).

Cuando José en el (L4) dice “[...] la fórmula que sería multiplicando por 2 [...] n , que sería el número del tejido y sumándole 3 y entonces la fórmula sería 2 por n más 3 y nos daría el número de agujeros”, y escribe << multiplicando por 2 n y sumándole 3 = fórmula $2 \times n + 3 =$ >> (ver imagen 4). Vemos que consigue a través del habla y signos escritos (simbolismo alfanumérico) que se manifiesten y aparezcan en el discurso a través de letras y frases claves para identificar las variables intervinientes y esbozar una relación de covariación en el nivel simbólico con el lenguaje alfanumérico del álgebra, que se puede identificar como , vemos cómo José trabaja con una forma reducida de signos o recursos dado que representa su frase clave en símbolos alfanuméricos del álgebra, evidenciándose de esta manera un proceso de objetivación de contracción semiótica (Lasprilla, 2014), y por lo tanto, de nodo semiótico (Radford, 2010a).

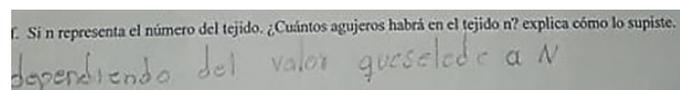
En este sentido, José tal como lo expresa Radford (2013, p. 12), “ha llegado a constituir una fórmula encarnada en la acción y en el lenguaje y que se aplica a cualquier término particular [...], la encarnación de la fórmula en la acción y en el lenguaje natural es potente” y las variables aparecen como objeto de discurso para todos sus valores. De esta manera, notamos que muestra como posibilidad una “forma de conciencia mediatizadas por el uso más abstracto del lenguaje oral y escrito” (p. 12). En palabras de Radford (2018b, p. 23), “esta generalización se basa en el hecho de usar símbolos o signos abstractos”, es así como, el foco pasa a las variables, operaciones y números reconceptualizados; le brinda posibilidades para alcanzar nuevos modos estéticos de imaginación y percepción. En este punto el habla ya no lidera el pensamiento de José, más bien, “el pensamiento simbólico ha reemplazado al verbal” (p. 21).

El proceso de identificación de la relación de covariación, realizado por el estudiante, expresa una idea de generalidad, algo que sigue más allá de las posiciones particulares ofrecidas en la tarea, en el espacio y en el

tiempo (Vergel et al., 2020). Aquí hay un salto en la manera de designar los objetos en su discurso, evidenciándose la designación simbólica de las variables intervinientes para generar una fórmula con signos alfanuméricos del álgebra. De este modo, vemos como el cambio aparece al considerar dichas relaciones de dependencia (Grupo Pretexto, 1999). Por su parte, Javier otro estudiante, en el ítem [f] escribe <<dependiendo del valor que se le dé [que se le dé] a N >> (ver imagen 5), vemos que mediante el recurso “dependiendo” reconoce y percibe la variación (MEN, 2006), indicando que de acuerdo con lo que cambie el número del tejido (variable independiente) así será el cambio en el número de agujeros (variable dependiente), al mismo tiempo, en consonancia con Vergel y Rojas (2018), interpreta la letra como un valor [número] desconocido pero fijo [particular], como incógnita.

Imagen 5

Producción escrita de Javier en el ítem [f] de la tarea 1.



Conclusiones

Con el desarrollo de esta investigación se evidenció la emergencia de recursos o MSO tales como acciones corpóreas, gestos indexicales (señalamientos o apuntamientos y deslizamientos), conteos rítmicos y subitizadamente, el ritmo y la actividad perceptual; el uso de signos escritos y hablados como palabras y frases claves, símbolos matemáticos y alfanuméricos, recursos lingüísticos, signos deícticos lingüísticos espaciales, (aquí, arriba, abajo, esquina, éste(o), ésta(s), acá), temporales (ahora, después, siempre) y de modo (así, igual); finalmente el uso de artefactos como (representación figural e icónica del tejido).

En relación con las estrategias para identificar las variables intervinientes se notaron en primer lugar mediante formas corpóreas (Vergel y Rojas, 2018), acciones con el gesto, el ritmo, la actividad perceptual y el habla; en segundo lugar, las variables y sus relaciones permanecen implícitas y explícitas (Radford, 2010a, 2018b), es decir no forman y hacen parte del discurso, las primeras mediante acciones con números concretos y sus operaciones y las segundas con palabras y frases claves, también con signos (símbolos y letras) denotados a través del habla y lo escrito, además con deícticos espaciales (2018b) como “arriba, abajo, aquí, esquina” y recursos lingüísticos como “debiendo, fila,

filitas, puntos y líneas”, como parte de su riqueza oral histórica y culturalmente adquirida; finalmente gracias al uso de artefactos como la representación figural e icónica del tejido para manipular e identificar lo indeterminado, como una opción quizás natural de trabajar con las variables y cantidades además las tablas y el uso de la calculadora mediante acciones con números específicos y concretos, que les ayuda a abordar la fórmula explícita encarnada sobre la cantidad desconocida de las variables.

Se logró identificar y describir las características del cambio y la variación asociadas al uso de recursos semióticos que emergen de las producciones, las cuales brotan es con y a través de la actividad multimodal (Radford et al., 2009), o multisemiótica (Radford y Sabena, 2015), con la gran riqueza y multiplicidad del uso coordinado y reducido de no sólo recursos cognitivos, sino también físicos y perceptuales, mediante múltiples formas de expresión y representación, a través de acciones con el cuerpo (gestos, conteos, percepción, mirada, ritmo), mediada por el uso de signos escritos y hablados (palabras y frases claves, símbolos matemáticos y alfanuméricos), y de artefactos (representación figural icónica del tejido, tablas y calculadora), para encontrarse con características del cambio y variación, tales como: (I) lo que cambia y permanece constante; (II) el reconocimiento de la variación [variación conjunta]; (III) la cuantificación (cuánto) del cambio(a); (IV) identificación de variables intervinientes [dependiente-independiente]; (V) el campo de variación [universo] de cada variable; (VI) relaciones de covariación en el nivel factual, contextual y simbólico de generalización entre las cantidades intervinientes como procesos de objetivación.

Referencias

- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño, M. I., Iori, M., y Santi, G. (2020). Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *RECME- Revista Colombiana de Matemática Educativa, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, 5 (2), 33-50.
- Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Barajas, M., Madero, P., y Sánchez, A. (2018). *Una aproximación a la generalización de patrones para fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado tercero, del colegio Isla del Sol*. I.E.D. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Javeriana]. Repositorio PUJ. <http://hdl.handle.net/10554/35027>.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the International 28th conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 135 – 142. Bergen, Norway: Bergen University College.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. 5 - 23. Berlin, Germany: Springer. DOI:10.1007/978-3-642-17735-4_2.
- Caballero-Pérez, M., y Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 1057-1065.
- Callejo, M., García, A., y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6 - 12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, (vol 10), 5 –25.
- Cañadas, M., y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*. 209 - 218.
- Carraher, D., y Schliemann, A. (2019). El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12 años) en Estados Unidos. *Infancia y Aprendizaje. Journal for the Study of Education and Development*, 42(3), 498-522. DOI: 10.1080/02103702.2019.1638570. Springer.
- Eco, U. (2000). *Tratado de Semiótica General*, (Carlos Manzano, trad.). Barcelona, España: Lumen. (Obra original publicada en 1976).
- Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática-Bolema*, 26 (42B), 483-512.
- Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de

- Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. *Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lasprilla, A. (2014). *Generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de 9 y 10 años*. [Tesis de maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio UD.
- Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. London: Kluwer Academic Publishers. 65-86. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5.
- MEN 'Ministerio de Educación Nacional' (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.
- Moreno, G. (2018). *La dimensión gestual en la generalización de patrones en estudiantes de cuarto grado de educación primaria*. [Tesis de maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio UD.
- NCTM 'National Council of Teachers of Mathematics'. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. Recuperado de: <https://epdf.pub/queue/principles-and-standards-for-school-mathematics.html>.
- Posada, F., Obando, G., Múnera, J., y Villa, J. (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. 1. ed. Medellín, Colombia: Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. 15-30.
- Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006a). Semiótica y Educación Matemática. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2, 7-21. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/9699/1/Radford2006Semiotica.pdf>.
- Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 9(1), 103-129.
- Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1- 19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>.
- Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA-Pensamiento Numérico Avanzado*, 4 (2), 37 - 62.
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 93. 17-24.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.
- Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Programa de pós-graduação em educação matemática*, 8 (18), 547- 567.
- Radford, L. (2018a). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA-Pensamiento Numérico Avanzado*, 12(2). 61-80.
- Radford, L. (2018b). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). New York: Springer.
- Radford, L. (2020a). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoría da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática*. (pp. 15-42). São Paulo, Brazil: Livraria da Física.

- Radford, L. (2020b). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza- aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, Número especial de la Teoría de la Objetivación*. 5(2), 15-31.
- Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009) Beyond words. *Educational studies in mathematics*, 70(3), 91-95. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y>.
- Radford, L., y Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157 – 182). New York: Springer. DOI: 10.1007/978-94-017-9181-6_7
- Ramírez, S. (2017). *Generalización de Patrones: Una forma de desarrollar el pensamiento algebraico*. [Tesis de maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio UD.
- Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J. y Mora, L. - Grupo Pretexto. (1999). *La Transición aritmética-álgebra*. Bogotá. Editorial Gaia.
- Rojas, P., y Vergel, R. (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 3(1), 19–30. Recuperado de: [http://funes.uniandes.edu.co/12714/1/document_6\).pdf](http://funes.uniandes.edu.co/12714/1/document_6).pdf).
- Sánchez, L. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos. *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)*, 1121–1131. DOI 10.1017/CBO9781107415324.004.
- Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Congreso Internacional: Tecnologías computacionales en el currículo de Matemáticas* (8-10 May 2002). Bogotá, Colombia, 61–70.
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. [Tesis de doctorado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio UD. <https://doi.org/10.1038/132817a0>.
- Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá: Editorial UD.
- Vergel, R. (2019). Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético “sofisticado” y proto-formas de pensamiento algebraico. In *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.*, 1–18.
- Vergel, R., y Rojas, P. (2018). Álgebra Escolar y Pensamiento Algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá. Editorial UD.
- Vergel, R., González, L., y Miranda, I. (2020). La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, Número especial de la Teoría de la Objetivación*. 5(2), 67-81.
- Vygotsky, L. S. (1997). *Collected works*, Vol. 4 (R. Rieber, Ed.). New York: Plenum.
- Zapatera, A. (2018a). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números revista de didáctica de las matemáticas*, 97, 51-67.
- Zapatera, A. (2018b). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 21(1). 87-114. DOI: 10.12802/relime.18.2114