UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y
Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.19185

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS

Resultado de Investigación

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FÍSICA CLASIFICADOS POR NIVELES DE COMPLEJIDAD: UNA EXPERIENCIA

THE RESOLUTION OF PROBLEMS IN PHYSICS CLASSIFIED BY COMPLEXITIES LEVEL: AN EXPERIENCE

RESOLUÇAO DE PROBLEMAS EM FÍSICA CLASSIFICADO POR NÍVEIS DE COMPLEXIDADE: UMA EXPERIÊNCIA

Leonardo Julian Picos Rivers*, José Quintín Cuador Gil**
Carlos Rafael Martínez de Osaba Picos***

Picos-Rivers, L. J., Cuador-Gil, J. Q. y Martínez de Osaba Picos, C.R. (2022). La resolución de problemas en física por niveles de complejidad: una experiencia. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias* ,18(3), pp. 577-590. DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.19185

Resumen

En este artículo se pretende dar respuesta a la pregunta, ¿cómo lograr el desarrollo de habilidades en estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de física? No es posible dar una respuesta exacta y definitiva a esta tarea, muchos docentes enseñan y han descrito sus experiencias, coinciden en proponer ejercicios desde los más simples a los más complejos, mediante estrategias de solución. En este estudio presentamos una clasificación de problemas físicos por niveles de complejidad para la Enseñanza de la Física en carreras de ingeniería, en respuesta a la idea de elevar el nivel de complejidad. Planteamos estrategias para la solución de problemas, para lo cual recurrimos, como ejemplo, al método cinemático, el método dinámico y la conservación de la energía mecánica. Además, exponemos una selección de problemas de los textos utilizados en los cursos de física general para carreras de ingeniería en universidades cubanas, donde se incluyen un total de 430 ejercicios, distribuidos en tres niveles de complejidad. Por último, comentamos el logro de buenos resultados con el uso de la metodología propuesta a partir de la experiencia práctica de los autores.

Palabras clave: solución de problemas en física, clasificación de problemas, estrategias de solución.

Abstract

In this paper we pretend to answer the question, how we can achieve skills in engineering students by the resolution of physics problems? It is not possible to give an exact and definitive answer to this question, nowadays, many professors teach physics

* Licenciado en Educación, especialidad Física y Astronomía, Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de La Habana, Cuba. leonardo.pr@automatica.cujae..edu.cu, https://orcid.org/0000-0002-6958-2227

** Doctor en Ciencias Técnicas, Facultad de Ciencias Técnicas, Universidad de Pinar del Río, Cuba. cuador@upr.edu.cu, https://orcid.org/0000-0002-6483-0172

*** Máster en Pedagogía Profesional, Departamento de Física, Facultad de Educación Media, Universidad de Pinar del Río, Cuba. carlos.rafael@upr.edu.cu. https://orcid.org/0000-0003-0265-2063

resolution problems and had presented their experiences, which has a common factor, to propose problems from the simplest to the most complex one, developing strategies of solution. A classification of physical problems for complexities levels, attending to the idea of increasing the complexity gradually, to teach physics in engineering careers is presented in this study. The solution strategies are presented using the kinematic, the dynamic and the mechanical energy conservation methods as example. The selection of problems from the texts of solution of problems used in the courses of general physics for engineering careers in Cuban´s universities was carried out, 430 problems distributed in three levels are totalized. The achievement of good results with the use of the methodology proposed is commented, from the practical experience of the authors.

Keywords: Solution of problems in physics; classification of problems; strategies of solution.

Resumo

Este artigo tem como objetivo responder à questão, como alcançar o desenvolvimento de competências em estudantes de engenharia na resolução de problemas de física? Não é possível dar uma resposta exata e definitiva nesse sentido, muitos professores atualmente ensinam e têm apresentado suas experiências, concordando em um fator comum, propondo exercícios dos mais simples aos mais complexos, desenvolvendo estratégias de solução. Este estudo apresenta uma classificação de problemas físicos por níveis de complexidade para o ensino de física nas carreiras de engenharia, atendendo à ideia de elevar o nível de complexidade. Estratégias de resolução de problemas são propostas utilizando como exemplos o método cinemático, o método dinâmico e a conservação da energia mecânica. Trabalhamos com base em uma seleção de problemas de textos de resolução de problemas usados em cursos de física geral para carreiras de engenharia em universidades cubanas, que incluem um total de 430, distribuídos em três níveis. Por fim, comenta-se a obtenção de bons resultados com a utilização da metodologia proposta com base na experiência prática dos autores.

Palavras-Chave: Solução de problemas em física; classificação de problemas; estratégias de solução.

Introducción

El estudiante de ingeniería no podrá enfrentar futuros problemas de su profesión, si no lo hubiese hecho anteriormente ante problemas de algún tipo; es decir, si no aprende a resolver problemas; en consecuencia, no tendría la oportunidad de desarrollar habilidades de razonamiento. En este sentido, los planes de estudio en carreras de ingeniería incluyen asignaturas de las ciencias básicas y naturales. La física, en particular, forma parte de estas asignaturas, y tiene el objetivo general de preparar al estudiante para que conozca y explique propiedades y el comportamiento del mundo que le rodea, la energía, la materia y las interacciones de estas en el espacio y en el tiempo. En YOUNG, FREEDMAN (2009) se plantea que la física es la base de toda la ingeniería y la tecnología; frase de la que se infiere que en física se estudian las leyes básicas de todo fenómeno natural, y en tecnología, el ingeniero utiliza y determina las formas en que las leyes físicas son usadas para beneficio de la sociedad. En este proceso inevitablemente el ingeniero se enfrenta a situaciones que requieren habilidad para resolver problemas, que en equipos de trabajo multidisciplinario se discuten y aprueban las propuestas más eficientes para obtener el resultado deseado. Por esto, consideramos que un estudiante de ingeniería debe tener momentos de entrenamiento que le permitan estar preparado para resolver situaciones problémicas de la práctica profesional.

En la Enseñanza de la Física es fundamental la solución de problemas, lo que contribuye al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes de ingeniería (PICOS-RIVERS, CUADOR-GIL, MARTÍNEZ DE OSABA-PICOS, 2021). La solución de problemas ha sido un tema de intensa investigación (CONCARI, GIORGI, 2000). Mediante la solución de problemas se alcanza un pleno dominio del aparato conceptual de la física, de los elementos de carácter metodológicos para la aplicación creadora de los conocimientos en beneficio de una formación sólida del ingeniero. La solución de problemas es una tarea compleja que requiere de gran esfuerzo y tenacidad, sin que el resultado del éxito esté asegurado de antemano. Lograr la solución de un problema es un hecho muy significativo; fracasar es solo la posibilidad de profundizar más en el conocimiento, trazar nuevos algoritmos de solución e intentar nuevamente. La solución de problemas físicos desarrolla habilidades que perduran en los estudiantes de ingeniería, de modo que aun cuando los contenidos teóricos y la lógica de solución de situaciones físicas sean olvidados, las habilidades que se adquieren serán propias e innatas para enfrentar con mayor capacidad situaciones reales de la vida y del futuro desempeño profesional del estudiante, de forma general, e ingeniería, en particular.

A partir de la experiencia pedagógica de algunos docentes, se considera que las cuestiones que inciden en el fracaso de los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de un problema de física, se deben, en alguna medida, a la poca comprensión y dominio de los temas abordados, lo cual no le permite clasificar, ordenar y asimilar los conceptos de física. En ocasiones, sus conocimientos matemáticos son insuficientes (ELIZONDO TREVIÑO, 2013), no se realiza una lectura comprensiva del problema que le permita ubicarse en el contexto de la tarea asignada, dificultad que se arrastra desde todos los niveles educativos (MENDOZA MACHADO, 2021). En los diferentes procesos de enseñanza y aprendizaje se establece una verdadera relación dialéctica, que no es posible considerarla aisladamente; luego se infiere que el fracaso en la solución de problemas a lápiz y papel no solo está condicionado por las limitaciones o fallas antes mencionadas, sino que, en ocasiones, por parte de los docentes no se hace una adecuada estructuración de los problemas a enfrentar según el grado de complejidad en su solución, es decir, debe existir un enfrentamiento gradual a los niveles de dificultad.

En este sentido, consideramos que el perfeccionamiento de los elementos necesarios para clasificar los problemas físicos puede contribuir de forma positiva en las habilidades que adquieren los estudiantes en la solución de problemas, así como el desarrollo de estrategias y algoritmos de solución.

Este trabajo tiene como objetivo presentar una clasificación de problemas de física en temas de mecánica clásica, así como consideraciones metodológicas para la solución de problemas, y una selección por niveles de complejidad, de modo que se da respuesta a la pregunta “¿cómo lograr el desarrollo de habilidades en estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de física?”. La aplicación práctica de estas ideas ha permitido obtener buenos resultados en la Enseñanza de la Física en carreras de ingeniería en nuestras universidades.

1. Clasificación de problemas físicos

La enseñanza de problemas en física debe adelantarse según los niveles de complejidad de las situaciones físicas planteadas a los estudiantes en clase. Resulta lógico pensar que el tránsito por ejercicios simples, aumentando el nivel de complejidad, puede proporcionar beneficios en el aprendizaje y el desarrollo de habilidades de razonamiento. Varios autores han demostrado la idea anterior de diferentes formas (SÁNCHEZ MENDIVELSO, 2007; MADERA BLANCO, 2017;

VARO MARTÍNEZ *et al.*, 2018; RAMÍREZ LÓPEZ, 2021; entre otros).

Por consiguiente, proponemos niveles de asimilación a utilizar en la solución de problemas en clases prácticas de física para ingeniería. En cada uno de ellos se especifican los indicadores a tener en cuenta para clasificar los problemas y ordenarlos desde los más sencillos y elementales, hasta lograr paulatinamente problemas más complejos e interesantes que desarrollan en conjunto la capacidad de pensar y razonar, a estar preparados para enfrentarse a planteamientos no estereotipados de problemas y a lograr soluciones originales.

Un problema se considera del primer nivel, cuando los estudiantes:

- Pueden responder preguntas relacionadas en contextos que les son conocidos, extraen información pertinente de una fuente y trabajan un modelo de representación.
- Utilizan algoritmos, fórmulas, procesos o transformaciones elementales que no impliquen transformaciones complejas.
- Resuelven problemas que implican una representación física en la que el contenido es presentado de forma clara y directa, en contextos familiares, utilizando imágenes o dibujos de objetos y realizando cálculos básicos.

Un problema se considera del segundo nivel cuando los estudiantes:

- Trabajan con modelos explícitos de situaciones concretas de modo tal que le permitan integrar diferentes conceptos, utilizándolos a partir de la representación de los objetos y la aplicación en contextos similares, asociándolos directa e indirectamente con el mundo real.
- Recurren a habilidades que les permiten razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en determinados contextos.
- Pueden ejecutar procedimientos escritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales.
- Resuelven problemas que impliquen el razonamiento visual y la argumentación en situaciones no habituales, en los que haya que trabajar con representaciones múltiples relacionadas (gráficas, tablas o fórmulas), y en los que se les exige decidir entre alternativas bien definidas.

Un problema se considera del tercer nivel, cuando los estudiantes:

- Saben relacionar e integrar conceptos, utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones complejas; identifican las condicionantes y especifican los supuestos.
- Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas, extrapolándolas a nuevas situaciones o formas de proceder ya aprendidas.
- Resuelven problemas complejos que implican representaciones múltiples y a menudo procesos de cálculos secuenciales, además se requiere la formulación de supuestos adecuados, o trabajar con unos supuestos dados, en los que sea necesario utilizar una comprensión significativa, razonamiento abstracto, técnicas de argumentación, conocimientos técnicos y convenciones para problemas complejos del mundo real.
- Analizan una situación, toman decisiones teniendo en cuenta las relaciones subyacentes y las que enlazan con la solución.

2. Estrategias para la solución de problemas

A continuación, exponemos las estrategias propuestas para la solución de problemas, según el método a utilizar.

a. Estrategia para resolver problemas utilizando el método cinemático

- Analizar la fuente de información de los datos (texto, gráfico, tabla) y listar cantidades como: posición (x), posición inicial (x_o), velocidad (v), velocidad inicial (v_o), aceleración (a) y tiempo (t).

- Escribir los valores de las variables conocidas.
- Hacer figuras grandes y claras que ilustren la situación física planteada.
- Decidir sobre dónde resultaría más conveniente situar el origen de coordenadas y cuál es el sentido positivo en las direcciones implicadas en el problema.
- Tener en cuenta que el sentido positivo del eje determina automáticamente las direcciones positiva de la velocidad y la aceleración.
- Replantear el problema con palabras y luego traducir su descripción a símbolos y ecuaciones, se hace necesario clarificar ideas, responder preguntas, asegúrese de que entienden todos los conceptos relacionados de forma exacta.
- Escribir las ecuaciones matemáticas que ligan las cantidades en cuestión. Es necesario plantear un sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas.
- Resolver las ecuaciones. La solución a los problemas numéricos debe ser casi siempre algebraica y los datos numéricos solo deben ser utilizados al final. Las soluciones algebraicas, además de permitir una mayor simplificación, dan la posibilidad de discutir los casos límite.
- Verificar las dimensiones y no olvidar las unidades, recordar que estas se multiplican y dividen igual que los símbolos algebraicos.
- Los valores numéricos se deben redondear a un número de cifras que den sentido físico a la solución.

b. Estrategia para resolver problemas utilizando el método dinámico

- Hacer un dibujo de la situación física, con dimensiones y ángulo.
- Definir un sistema de coordenadas, indicar el origen y la dirección del eje positivo.
- Ser consecuente con los signos. Una vez definido el eje X y su dirección positiva, las componentes de velocidad, aceleración y fuerza en esa dirección serán positivas.
- Escoger un cuerpo en equilibrio y dibujar un diagrama de cuerpo libre para él.
- Pregúntese que interacciones están presentes con el cuerpo, ya sea en contacto o a distancia, dibujar los vectores de fuerza, unos para cada interacción.
- Escoger los ejes coordenados y representar cada fuerza que actúa sobre el cuerpo con sus componentes sobre los ejes. Para dos o más cuerpos, repetir las operaciones anteriores.
- Para varios cuerpos obtener las ecuaciones de ligaduras para las coordenadas, velocidades y aceleraciones. (Tener en cuenta el modelo de hilo inextensible).
- Al aplicar la primera o segunda ley de Newton, concentrarse en un cuerpo en específico ya que su aceleración está determinada por las fuerzas que actúan sobre él sin incluir las que actúen sobre otros cuerpos.
- Para dos o más cuerpos en interacción, usar la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que ejercen entre sí.
- Escribir las ecuaciones para cada eje coordenado (si hay dos o más cuerpos repita la operación anterior). Se necesita tantas ecuaciones independientes como cantidades desconocidas existan.
- Resolver el sistema de ecuaciones para obtener las incógnitas.
- Ver si los resultados obtenidos son lógicos; si el resultado es una fórmula, tratar de encontrar los casos especiales, es decir, los extremos para los que puedan estimar los resultados.

c. Estrategia para resolver problemas utilizando la conservación de la energía mecánica

- Hacer un dibujo sencillo de la situación física.
- Escoger los estados inicial y final del cuerpo a comparar, de acuerdo con los datos e incógnitas del problema.

- Dibujar un diagrama del cuerpo libre con todas las fuerzas que actúan sobre él.
- Revisar los signos; si una fuerza tiene componente en la dirección del desplazamiento, su trabajo será positivo; si tiene componente en sentido opuesto al desplazamiento, su trabajo será negativo.
- Definir el sistema de coordenadas, sobre todo el nivel en el que la ordenada es nula ($y = 0$) y tomar la dirección de la ordenada (y) hacia arriba.
- Listar las energías cinética y potencial inicial y final.
- Identificar las fuerzas conservativas que realizan trabajo y relacionarla con la energía potencial.
- Identificar las fuerzas no conservativas que realicen trabajo, relacionar las energías cinética y potencial con el trabajo de estas fuerzas.
- Si no existen fuerzas no conservativas, o las fuerzas que existen no realizan trabajo mecánico, aplicar el principio de conservación de la energía mecánica.

3. Selección de problemas por niveles

A partir de una revisión de los textos de solución de problemas, puestos a disposición en los cursos de física general para los estudiantes de ciencias e ingenierías, cuyos autores podemos citar (VOLKENSHTEIN, 1976; KÓSEL, 1983; SÁVCHENKO, 1989; ÍRODOV, 1979; PORTUONDO, 2010; STRELKOV, 1967; YOUNG Y FREEDMAN, 2009; HALLIDAY, RESNICK, KRANE 2003), seleccionamos, solucionamos y clasificamos un total de 430 problemas, los cuales se distribuyen del modo siguiente: 171 del primer nivel, 130 del segundo y 129 del tercero (tabla 1).

Tabla 1. Clasificación de problemas por temas.

Tema	Primer nivel	Segundo nivel	Tercer nivel	Total
Cinemática				
Movimiento rectilíneo	14	8	5	27
Caída libre	6	5	3	14
Movimiento bidimensional	6	6	6	18
Problema directo	12	5	19	36
Movimiento relativo	7	3	4	14
Cinemática de la rotación	7	9	6	22
Dinámica				
Estática	7	10	5	22
Partículas	22	5	7	34
Sistema de partículas	8	9	10	27
Problema directo e inverso	3	4	8	15
Impulso y momento lineal				
Impulso y momento lineal	10	14	12	36
Trabajo y energía				
Trabajo	10	7	7	24
Teorema del trabajo y la energía	12	12	8	32
Conservación de la energía	9	8	6	23
Conservación de la energía y la cantidad de movimiento	4	5	5	14
Gravitación				
Gravitación	11	3	1	15
Dinámica de la rotación				
Dinámica de la rotación	13	10	12	35
Oscilaciones				
Oscilaciones	10	7	5	22
Total	171	130	129	430

Fuente: elaboración propia.

Mostramos a continuación algunos ejemplos de problemas donde se puede apreciar la diferencia por niveles de complejidad.

a. Primer nivel

Se tiene en cuenta:

- El contenido se presenta de forma clara.
- Las preguntas están relacionadas con contextos que le son conocidos.
- Se hace uso de un modelo representativo.

- Se hace uso de algoritmos y fórmulas conocidas.
- Se utiliza dibujos e imágenes.
- Se hacen cálculos básicos.

Propuesta de problemas del primer nivel:

i) Una piedra lanzada con una velocidad $v_o = 12$ m/s, y formando un ángulo $\alpha = 45º$ con el horizonte, cayó a tierra a la distancia *S* del sitio de lanzamiento. ¿Desde qué altura *h* habrá que lanzar horizontalmente esta misma piedra para que, al imprimirle la misma velocidad inicial v_o, caiga en el mismo sitio?

Solución:

$$x = \frac{v_o^2 sen(2\alpha)}{g}\ ;\ 2\alpha = 90^o \rightarrow x = \frac{{v_o}^2}{g} \qquad (1)$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2\ ;\ x = v_o t \quad \rightarrow \quad x = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene: $h = \frac{{v_o}^2}{2g}$ = 7,34 m

ii) Un cazador le apunta con su fusil horizontalmente a una presa que se encuentra a una distancia *L*. Si en el mismo instante en que el cazador dispara, la presa se deja caer. Determine cuánto desciende la presa antes de caer abatida por el disparo. La velocidad inicial del proyectil es v_o.

Solución:

y = ½ gt^2 (para el proyectil y la presa) (3)

$x = v_{ox}t = v_o t = L$ (4)

De (4) se obtiene: $t = \frac{L}{v_o}$ (5)

Sustituyendo (5) en (3) se obtiene: $y = ½\ g\ (\frac{L}{v_o})$

La presa descenderá una altura: $h = \frac{g\,L}{2v_o}$

iii) En una feria, los clavadistas se dejan caer desde una plataforma 24,4 m por encima de un estanque. Según el anunciador, los clavadistas entran en el agua a 29 m/s. Ignore la resistencia del aire. ¿Es verdad lo que dice el anunciador? ¿Puede una clavadista saltar hacia arriba desde la plataforma y, salvando la tabla, entrar en el agua a 29 m/s? De ser así, ¿qué velocidad inicial requiere? ¿Se puede alcanzar esa velocidad?

Solución:

Sabemos que: $V^2 = V_o{}^2 + 2\,g\,h$ (6)

De (6) se obtiene: $v = \sqrt{2gh}$ = 21,9 m/s (7)

(el anunciador miente)

En esas condiciones, para llegar al agua con 29 m/s, debió caer de una altura, que se obtiene de (7):

$$h = \frac{v^2}{2g} = 42{,}9m$$

Luego se debió elevar 18,5 m por encima del trampolín, si lo lograra al elevarse los 18,5 m, al regresar y pasar por el trampolín, tendría:

$$v_a^2 = v_{ot}^2 + 2gy_o \quad \Rightarrow \quad v_{ot} = \sqrt{v_a^2 - 2gy_o} = 19 \text{ m/s}$$

(es imposible alcanzar esa velocidad)

iv) Una persona asciende por una escalera mecánica quieta de 15 m de longitud en 90 s. Estando de pie en la misma escalera, ahora en movimiento, la persona es transportada en 60 s. ¿Cuánto tiempo le tomaría a esa persona ascender por la escalera en movimiento? ¿Depende la respuesta de la longitud de la escalera?

Solución:

a) La velocidad de la persona en la escalera en movimiento (v) sería igual a la velocidad de la persona ascendiendo con la escalera quieta (v_e') más la velocidad de la persona quieta con la escalera en movimiento (v_e'').

$$v = v_e' + v_e'' \qquad (8)$$

$$v = \frac{L}{t}\ ;\ v_e' = \frac{L}{60}\ ;\ v_e'' = \frac{L}{90} \qquad (9)$$

Sustituyendo (9) en (8) obtenemos: $\frac{L}{t} = \frac{L}{60} + \frac{L}{90}$

De donde: t = 180/5 s = 36 s.

b) No depende de la longitud *L*.

v) Un pasajero nervioso en un avión que despega, se quita su corbata y la mantiene suelta en sus dedos, observa que durante la carrera de despegue, que dura 30 s, la corbata forma un ángulo de 15º con la vertical.
a) ¿Cuál es la velocidad del avión en el despegue?
b) ¿Cuánta pista necesita para despegar?

Solución:
a) La velocidad de despegue sería el producto de la aceleración adquirida por el avión por el tiempo de la carrera de despegue, esto es:

$v = at$ (10)

Se puede obtener además que:

$$Tsen(\theta) = ma$$

$$T\cos(\theta) = mg$$

De donde se obtiene que: $a = g\tan(\theta)$ (11)

Sustituyendo (11) en (10):

$v = g\tan(\theta)t$ = 9,8 m/s^2 tan 15° 30 s = 78,7 m/s

b) Δx = ½ a t^2 = $\frac{1}{2}\tan(\theta)t^2$ = 1181,66 m = 1,2 km

b. Segundo nivel

Se tiene en cuenta:

- Se trabaja con modelos.
- Se integran y relacionan diferentes conceptos.
- Se razona con flexibilidad.
- Se resuelven problemas que implican el razonamiento visual.
- Se trabaja con tablas gráficos o fórmulas.

Propuesta de problemas del segundo nivel:

vi) Una curva circular de carretera está proyectada para vehículos a 70 km/h.
a) Si el radio de curvatura es de 120 m, ¿cuál es el ángulo correcto de sobreelevación de la carretera?
b) Si la carretera no se sobreeleva, ¿cuál es el mínimo coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento para evitar que los vehículos se patinen a esa velocidad?

Solución (figura 1):

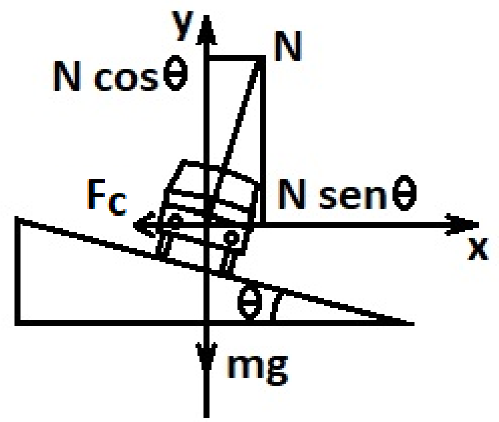

Figura 1. Diagrama problema vi). Fuente: PICOS-RIVERS, 2022.

a) De la figura 1 se obtienen:

$\mathrm{N}\ \mathrm{sen}(\theta) = \frac{mv^2}{R}$ y $N\cos(\theta) = mg$ (12)

Uniendo las igualdades de (12) obtenemos:

$tag(\theta) = \frac{v^2}{R\,g}$ = 0,32 $\Rightarrow\ \theta = 17{,}82^o$

b) Si la carretera no se sobreeleva, se sustituye (12) por (13):

$$\mu.mg = \frac{mv^2}{R} \qquad (13)$$

Obteniendo: $\mu = \frac{v^2}{gR} = 0{,}32$

vii) Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje X, de modo que su velocidad varía de según la ley $v = \alpha\sqrt{x}$, donde α es una constante positiva. Teniendo en cuenta que en el momento $t = 0$ se encontraba en el punto $x = 0$. Determinar:

a) La dependencia de la velocidad y la aceleración respecto al tiempo.

b) La velocidad media de la partícula en el tiempo, en el transcurso del cual recorre los *S* metros.

Solución:

a) $v = \alpha\sqrt{x} = \dfrac{dx}{dt} \rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt$ (14)

Integrando (14) obtenemos: $2\sqrt{x} = \alpha t + c$ (15)

Evaluando condiciones iniciales, para $t = 0$, $x = 0$, en (15) obtenemos que $C = 0$.

De (15) se obtiene $x = \dfrac{\alpha^2}{4}t^2$

Como $v = \dfrac{dx}{dt}$ se obtiene: $v = \dfrac{\alpha^2}{2}t$

Como $a = \dfrac{dv}{dt}$ se obtiene: $a = \dfrac{\alpha^2}{2}$

b) $\langle v\rangle = \dfrac{x - x_o}{t - t_o} = \dfrac{x}{t}$

Como $x = \dfrac{\alpha^2}{4}t^2 = S$ y $t = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{S}$

$$\therefore \langle v\rangle = \frac{\alpha^2}{4}t = \frac{\alpha^2}{4}\frac{2}{\alpha}\sqrt{S} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{S}$$

viii) En una varilla, situada formando un ángulo θ con la vertical, está montada una bolita, la varilla gira a la velocidad angular *w* en torno al eje vertical (figura 2).

a) Si la varilla es lisa, determinar la distancia R de la bolita al eje, para la cual se encuentra en equilibrio.

b) Si la varilla es rugosa y el coeficiente de rozamiento estático es μ, ¿A qué distancia R del eje la bolita estará en equilibrio?.

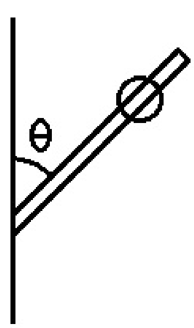

Figura 2. Esquema problema viii). Fuente: PICOS-RIVERS, 2022.

Solución:

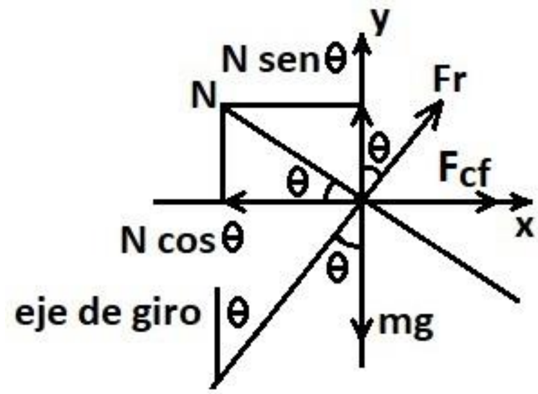

Figura 3. Diagrama de solución problema viii). Fuente: PICOS-RIVERS, 2022.

a) De la figura 3, se obtienen:

$N \,\mathrm{sen}\,(\theta) = mg$ y $N\cos(\theta) = mw^2 R$ (16)

De (16) podemos obtener: $R = \dfrac{g.\cot g(\theta)}{w^2}$

b) Suponiendo que la bola tiende a bajar.

De la figura 3 se obtiene (17) y (18):

$\mathrm{Nsen}(\theta) + \mu.N\cos(\theta) = mg$ (17)

De (17) podemos obtener: $N = \dfrac{mg}{sen(\theta) + \mu\cos(\theta)}$

$\mathrm{Ncos}(\theta) - \mu Nsen(\theta) = mw^2 R$ (18)

De (18) obtenemos: $R = \dfrac{g.(\cos(\theta) - \mu.sen(\theta)\ )}{w^2(sen(\theta) + \mu\cos(\theta))}$

Suponiendo que la bola tiende a subir:

De la figura 3 se obtiene (19) y (20):

$\mathrm{Nsen}(\theta) - \mu.N\cos(\theta) = mg$ (19)

De (19) se obtiene: $N = \dfrac{mg}{sen(\theta) - \mu\cos(\theta)}$

$\mathrm{Ncos}\ (\theta) - \mu Nsen(\theta) = mw^2 R$ (20)

De (20) obtenemos: $R = \dfrac{g.(\cos(\theta) - \mu.sen(\theta)\ )}{w^2(sen(\theta) + \mu\cos(\theta))}$

Luego la bolita estará en equilibrio para:

$$\frac{g(\cos\theta+\mu.sen\theta)}{w^2(sen\theta-\mu\cos\theta)} \geq R \leq \frac{g(\cos\theta-\mu.sen\theta)}{w^2(sen\theta+\mu\cos\theta)}$$

ix) La figura 4 muestra un cuerpo de 99 kg que se puede deslizar sin fricción sobre la varilla horizontal. Si el cuerpo se une a un resorte de constante $k = 4$ N/m y longitud natural 5 m. Hallar la máxima velocidad que adquiere si parte del reposo.

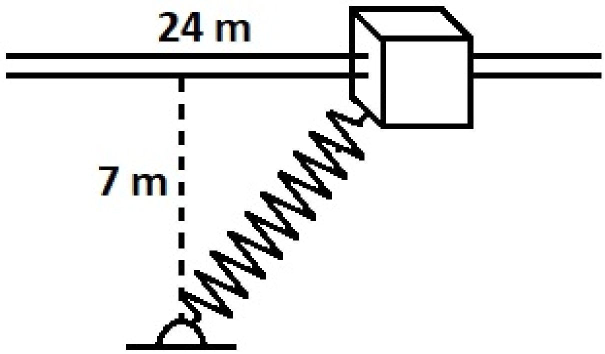

Figura 4. Esquema problema ix). Fuente: PICOS-RIVERS, 2022.

Solución:

$$l=\sqrt{(7)^2+(24)^2}=25.m$$

El sistema alcanza la máxima velocidad al pasar por la posición B (figura 5).

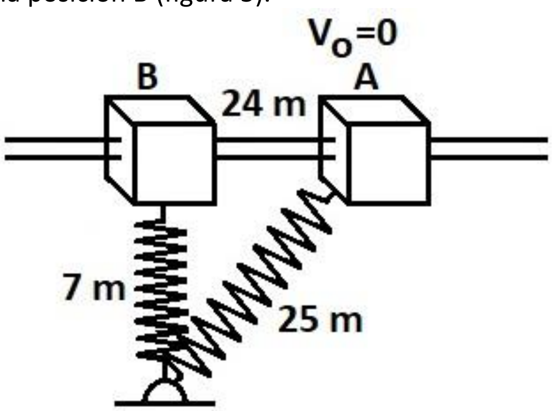

Figura 5. Diagrama de solución, problema ix). Fuente: PICOS-RIVERS, 2022.

Cuando el carril está en A, el resorte está deformado 20 m, y cuando está en B 2 m.

Podemos plantear (21):

$$\frac{1}{2}.h.x_A^2=\frac{1}{2}.m.v_B^2+\frac{1}{2}.k.x_B^2 \qquad (21)$$

De (21) obtenemos: $v_B=\sqrt{\frac{k.(x_A^2-x_b^2}{m}}=4m/s$

c. Tercer nivel

Se tiene en cuenta:

- Se relacionan e integran conceptos.
- Se utilizan modelos de situaciones complejas.
- Se relacionan y comparan estrategias, y las extrapolan a situaciones nuevas.
- Se resuelven problemas complejos.
- Se realizan cálculos secuenciales.

Propuesta de problemas del tercer nivel.

x) Dos autos se desplazan, uno detrás del otro, en una carretera recta. Cada uno tiene una velocidad de 22 m/s y la distancia entre ellos es de 33 m. El conductor del coche posterior decide alcanzar al coche de la cabeza y para ello acelera a 2,0 m/s^2 hasta 32 m/s, después de lo cual continúa a esa velocidad hasta que se encuentra a 30 m por delante del otro coche. ¿Cuánto se desplaza a lo largo de la carretera el coche que adelanta, entre el principio y final de esta operación? Si un tercer coche estuviese a la vista, marchando en sentido contrario a 18 m/s, ¿cuál sería la mínima distancia de seguridad, al principio de la operación de adelantamiento, entre el tercer coche y el coche que adelanta?

Solución:

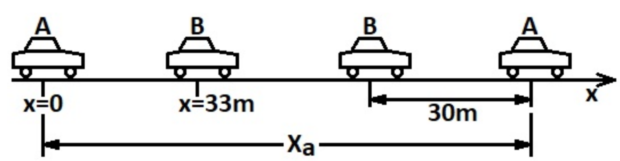

Figura 6. Diagrama problema x). Fuente: PICOS-RIVERS, 2022.

a) $X_A = Vo_A\,t + ½\,a_A t^2 + V_A t´´$ (22)

→ $X_B = Xo_B + V_B t´´$ (23)

→ $t + t´= t´´$ (24)

$X_B = X_A - 30 \rightarrow X_A = X_B + 30$ (25)

Sustituyendo (23) en (25) obtenemos:

$X_A = Xo_B + V_B\, t'' + 30$

$Xo_B = 33$, por lo que $X_A = 63 + V_B\, t''$ (26)

Sustituyendo (24) en (26) obtenemos:

$X_A = 63 + V_B\,(t + t')$ (27)

$t' = (X_A - 63 - V_B\, t) / V_B$ (28)

Sustituyendo (28) en (22)

$X_A = Vo_A\, t + ½\, a_A t2 + V_A\,(X_A - 63 - V_B\, t) / V_B)$ (29)

Teniendo en cuenta que:

$$a = \frac{V_a - V_{oa}}{t} \Rightarrow \text{t} = \frac{V_a - V_{oa}}{a}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (29):

$$X_A = \frac{\frac{(V_a - V_{oa})^2}{2a} + 63\frac{V_a}{V_b}}{(\frac{V_a}{V_b} - 1} = 0{,}26 \text{ km.}$$

b) $X_A = V_{oA}\, t + ½\, a_A t^2 + V_A t'$

$\rightarrow t = (V_A - V_{oA}) / a = 5$ s $\rightarrow X_A = 135 + 32\, t'$.

Por tanto: $t' = 3{,}8$ s.

De (3): $t + t' = t'' \rightarrow t'' = 8{,}8$ s.

Este es el tiempo que el auto A se encuentra en movimiento, luego ese será el tiempo que se moverá el auto C, y recorrerá:

$X_C = X_{oC} - V_C\, t'' = 414{,}4$ m.

xi) Dos partículas se mueven en un campo de gravedad homogéneo con aceleración a. En el momento inicial, ellas se encontraban en un mismo punto, y sus velocidades dirigidas horizontalmente y en sentido opuesto eran $v_1 = 3{,}0$ m/s y $v_2 = 4{,}0$ m/s. Hallar la distancia entre las partículas en el momento en que los vectores de sus velocidades resulten ser mutuamente perpendiculares.

Solución:

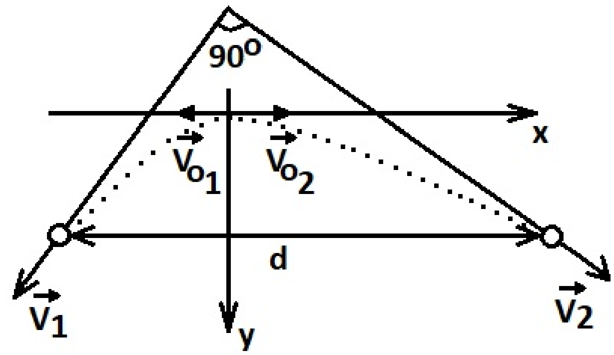

Figura 7. Diagrama problema xi). Fuente: PICOS-RIVERS, 2022.

De la figura 7 se puede obtener que:

$d = x_2 + (-x_1)$, cuando $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ (30)

$$\vec{v}_2 = v_{o2}\vec{i} + gt\vec{j} \text{ y } \vec{v}_1 = -v_{o1}\vec{i} + gt\vec{j} \quad (31)$$

En el momento que $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0$

Que es el producto escalar de las igualdades de (31):

$$\Rightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = (-v_{o1}\vec{i} + gt\vec{j}\,)\,.\,(v_{o2}\vec{i} + gt\vec{j}\,) = 0$$

$-v_{o1}v_{o2}\cos 0^0 + g^2t^2\cos 0^0 = 0$

$$\Rightarrow \text{t} = \frac{\sqrt{v_{o1}v_{o2}}}{g}; \quad (32)$$

Como: $d = x_2 + (-x_1)$

$$\Rightarrow \text{d} = |v_{o2}t| + |-v_{o1}t| = (\text{v}_{o2}+\text{v}_{o1}).\text{t}$$

Sustituyendo (32) se obtienen las distancias:

$$d = (v_{o2}+v_{o1}).\ \frac{\sqrt{v_{o1}v_{o2}}}{g}$$

xii) Un bote navega por un río a una velocidad que es 2,0 veces menor que la velocidad de la corriente de este. ¿Qué ángulo respecto a la corriente debe mantener el bote, para que esta lo arrastre lo menos posible durante el cruce del río? ¿A qué distancia se lo llevará abajo la corriente si la anchura del río es de 200 m?

Solución:

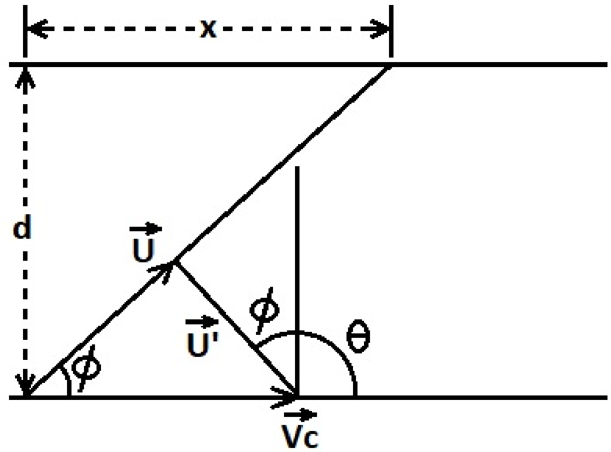

Figura 8. Diagrama problema xii). Fuente: PICOS-RIVERS, 2022.

Conocemos que:

$$\frac{v_c}{u'} = 2{,}0 \rightarrow \theta = \phi + \frac{\pi}{2} \qquad (33)$$

De la figura 8:

$$\text{tag } \phi = \frac{u''}{u} \rightarrow v_c^2 = u^2 + u''^2 \qquad (34)$$

De (34) se obtiene:

$$u = \sqrt{v_c^2 - u''^2} \qquad (35)$$

Sustituyendo (35) en (34) se obtiene (36):

$$\text{tag}\,\phi = \frac{u''}{\sqrt{v_c^2 - u''^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{v_c}{u''})^2 - 1}}$$

$$\therefore \phi = \text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{(\frac{v_c}{u''})^2 - 1}} \qquad (36)$$

$$\phi = 30^0 \Rightarrow \theta = 30^0 + 90^0 = 120^0$$

Cómo: $\text{tag}\,\phi = \dfrac{d}{x}$

$x = \dfrac{d}{tag\phi}$ = 346,41 m = 3,5 ×10^{-2} km.

xiii) Una partícula se mueve en el plano XY a una velocidad $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$, donde $\vec{i}$ y $\vec{i}$ son los vectores unitarios de los ejes X y Y, *a* y *b* son constantes. En el momento inicial la partícula se encontraba en el punto *x* = *y* = 0. Hallar:

a) Ecuación de la trayectoria.

b) El radio de curvatura de la trayectoria en dependencia de *x*.

Solución:

Conocemos que:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a \rightarrow \int dx = \int adt \rightarrow x = at + c$$

En $t = 0$; $x = 0$ y $c = 0$ → $x = a\,t$ (37)

$$v_y = \frac{dy}{dt} = bx = bat \rightarrow \int dy = \int batdt$$

$y = ½\,abt^2 + c$;

En $t = 0$; $y = 0$ y $c = 0$

$y = ½\,ab\,t^2$ (38)

De (37) y (38) eliminando t, obtenemos:

$y = \dfrac{b}{2a}x^2$ (Ecuación de la trayectoria).

Sabemos que:

$v_x = a$ → $v_y = ab\,t$ $v \Rightarrow = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v = \sqrt{a^2 + a^2b^2t^2}$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{a^2b^2t}{\sqrt{a^2 + a^2b^2t^2}} \qquad (39)$$

$$a_x = 0 \rightarrow a_y = a\,b \qquad (40)$$

De (39) y (40) se obtiene:

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a\,b$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{a^2b}{\sqrt{a^2 + a^2b^2t^2}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{a}{b}\left[1+(\frac{bx}{a})^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

xiv) Una partícula se mueve en el plano XY con una aceleración constante $\vec{w}$, en el sentido negativo del eje Y. La ecuación de la trayectoria de la partícula $y = a\ x - b\ x^2$, donde a y b son constantes positivas. Determinar la velocidad de la partícula en el origen de coordenadas.

Solución:

Sabemos que:

$y = ax - bx^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = a\dfrac{dx}{dt} - 2bx\dfrac{dx}{dt}$

$\therefore\ v_y = a.v_x - 2\ b\ x.v_x$ (41)

En el origen de coordenadas $x = 0 \Rightarrow v_y = av_x$

(41), se puede escribir como:

$$\frac{dv_y}{dt} = a\frac{dv_x}{dt} \text{-2b}\left[\frac{dx}{dt}v_x + x\frac{dv_x}{dt}\right]$$

$\Rightarrow\ w_y = a\ w_x - 2b\ (v_x^2 + x\ w_x)$.

Como $\vec{w}$ está en la dirección de $y \Rightarrow w_x = 0$

$\therefore w_y = 2bv_x^2 \Rightarrow v_x^2 = \dfrac{w_y}{2b}$ (42)

Como $w = w_y$, de (42) se obtiene: $v_x^2 = \dfrac{w}{2b}$

Sabemos que: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; y como $v_y = a\ v_x$

Obtenemos: $v = \sqrt{v_x^2 + a^2 v_x^2}$.

Si $v_x^2 = \dfrac{w}{2b}$, obtenemos: $v = \sqrt{\dfrac{w}{2b}(1+a^2)}$

4. Conclusiones

La clasificación de problemas desarrollada permite agrupar problemas de física por niveles de asimilación, ordenados desde los más simples a los más complejos, con lo cual se logra un aprendizaje más efectivo y una mayor preparación del estudiante de ingeniería para resolver problemas y situaciones prácticas de su profesión.

El uso de diferentes problemas por niveles de complejidad demostró, durante varios cursos, buenos resultados en la asimilación de los contenidos de física y en el desarrollo de habilidades en la solución de problemas por parte de los estudiantes de ingeniería.

Las estrategias de solución de problemas propuestas y empleadas han servido de guía en clases prácticas para la Enseñanza de la Física y el desarrollo del razonamiento lógico, lo que se demostró a través de respuestas más completas, rápidas y precisas de los estudiantes. Los problemas seleccionados constituyen una base de datos de problemas de física empleada durante varios cursos en clases prácticas, fuente que se puede enriquecer constantemente a partir del trabajo docente.

5. Referencias

CONCARI, S. B.; GIORGI, S. M. Los problemas resueltos en textos universitarios de física. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 18, n. 3, pp. 381-390. 2000.

ELIZONDO TREVIÑO, M. S. Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Física. **Presencia Universitaria**, Tegucigalpa, v. 5, n. 3, pp. 70-77. 2013.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. **Física**. V. 1. Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V. México. 658 p. 1993.

ÍRODOV, I. E. **Problemas de física general**. Editorial MIR. Moscú: URSS. 1979.

KÓSEL S. **Problemas de física**. Editorial Mir. Moscú: URSS. 1983.

MADERA BLANCO, J. L. **La profesionalización de la física en la formación del técnico medio en agronomía**. 85 p. Tesis de Máster en Pedagogía Profesional. Universidad de Pinar del Río. Pinar del Río. 2017.

MENDOZA-MACHADO, J. M. Estrategia metodológica para el aprendizaje de la lectura comprensiva. **Horizontes: Revista de Investigación en Ciencias de la Educación**, La Paz, v. 5, n. 17, pp. 77-92. 2021.

PICOS-RIVERS, L. J.; CUADOR-GIL, J. Q.; MARTÍNEZ DE OSABA PICOS, C. R. El uso del criterio de D'Alembert en la solución de problemas en sistemas no inerciales de referencia. **Latin American Journal of Physics Education**, Ciudad de México, v. 15, n. 2, pp. 1-6. 2021.

PORTUONDO DUANY, R. **Problemas seleccionados de física**. UPRM. Mayagüez: Puerto Rico. 2010.

RAMÍREZ LÓPEZ, G. P. Reseña: Didática da Física. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, Bogotá, v. 16, n. 1, pp. 192-195. 2021. https://doi.org/10.14483/23464712.17715

SÁNCHEZ MENDIVELSO, L. P. **La resolución de problemas como estrategia didáctica para desarrollar el aprendizaje significativo de los fluidos ideales**. 104 p. Tesis de Maestría en Docencia. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de La Salle. Bogotá. 2007. Recuperado de https://ciencia.lasalle.edu.co/maest_docencia/650

SÁVCHENKO, O. Y. **Problemas de física**. Editorial MIR. Moscú: URSS. 1989.

STRELKOV, S. P. **Ejercicios de mecánica**. Instituto del Libro. La Habana: Cuba. 1967.

VARO MARTÍNEZ, M.; LÓPEZ QUINTERO, J. L.; PONTES PEDRAJAS, A.; PÉREZ MARTÍN, P.; VARO, E.; JIMÉNEZ VALLE, A.; MUÑOZ PEINADO, J. Recursos TICs orientados a mejorar la capacidad de razonamiento científico como estrategia de resolución de problemas de ingeniería. **Revista de Innovación y Buenas Prácticas Docentes**, Córdoba, España, n. 5, pp. 67-72. 2018.

VOLKENSHTEIN, V. S. **Problemas de física general**. Editorial MIR. Moscú: URSS. 408 p. 1976.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física universitaria**. Vol. 1, 12.ª ed. Pearson Educación. México. 760 p. 2009.